



اختبار الفرضيات: Tests of Hypotheses

يعد اختبار الفرضيات الإحصائية من أهم المواضيع في مجال اتخاذ القرارات

مصطلحات ضرورية:

1. **الفرضية الاحصائية:** هي عبارة عن ادعاء أو تصريح قد يكون صائبا أو خاطئا حول معلمة أو أكثر لمجتمع أو لمجموعة من المجتمعات.

تؤخذ العينة من المجتمع وتدرس وتستخدم جميع المعلومات المتحصل عليها للوصول الى قرار بقبول أو رفض الفرضية الاحصائية. في حالة كون بيانات العينة تساند النظرية فإن الفرضية تقبل، أما إذا كانت البيانات تناقض النظرية ففي هذه الحالة ترفض الفرضية. تجدر الإشارة هنا الى ان قبولنا الفرضية الاحصائية هو ناتج عن عدم وجود أدلة كافية لرفضها من بيانات العينة ولذلك فإن قبولنا لهذه الفرضية لا يعني بالضرورة كونها صحيحة أما إذا رفضنا الفرضية بناءً على المعلومات الموجودة في بيانات العينة فإن ذلك يعني بأن الفرضية خاطئة. لذلك فإن الباحث أو الاحصائي يحاول دائما أن يضع الفرضية بشكل يأمل أن يرفضها، فمثلا إذا أراد الباحث أن يقارن صنفا جديدا من الحنطة مع الصنف المحلي فإنه يضع فرضية مفادها بأنه لا يوجد فرق معنوي بين الصنفين.

أن الفرضية التي يضعها الباحث على امل أن يرفضها تدعى بفرضية العدم Null Hypothesis ويرمز لها بـ H_0 ، ورفضنا لفرضية العدم يقودنا الى قبول فرضية بديلة عنها هذه الفرضية تدعى الفرضية البديلة ويرمز لها بـ H_1

2. الأخطاء التي يقع فيها الباحث

- أن طريقة اتخاذنا القرارات قد يقودنا الى الوقوع في نوعين من الخطأ هما
- خطأ من النوع الاول: يقع الباحث في الخطأ من النوع الاول إذا رفض فرضية العدم عندما تكون هي الفرضية الصحيحة.
 - خطأ من النوع الثاني: يقع الباحث في الخطأ من النوع الثاني إذا قبل فرضية العدم عندما تكون هي الفرضية الخاطئة

كما هو موضح في الجدول التالي:

H_1 خاطئة	H_0 صحيحة	الحالة الحقيقية القرار
خطأ من النوع الثاني	قرار صائب	H_0 قبول
قرار صائب	خطأ من النوع الاول	H_0 رفض

3. مستوى المعنوية: Level of Significant

أو مستوى الاحتمال Probability level

أو حجم الاختبار Size of the test

يعرف مستوى المعنوية بأنه درجة الاحتمال الذي نرفض به فرضية العدم H_0 عندما تكون هي الصحيحة أو بعبارة أخرى هو احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الاول ويرمز لها بـ α أي:

$$\alpha = P(\text{Type I error})$$

$$= P(\text{Reject } H_0 \mid H_0 \text{ is true})$$

فاذا استخدمنا مستوى معنوية 5% ورفضنا فرضية العدم H_0 نقول بأن هناك فرق معنوي، أما إذا رفضت فرضية العدم بمستوى معنوية 1% فيقال بأن هناك فرق معنوي جدا وفي الحالة الاولى فهذا يعني بأنه لو تكررت التجربة 100 مره فإن 5 منها تؤيد صحة فرضية العدم و 95 لا تطابق فرضية العدم.

منطقة الرفض: هي تلك المنطقة التي إذا وقعت قيمة المختبر الإحصائي داخلها تسبب في رفض فرضية العدم H_0 .

وتحدد منطقة الرفض بعد تعيين مستوى المعنوية
تسمى المنطقة تحت المنحني غير منطقة الرفض بمنطقة القبول التي إذا وقعت قيمة المختبر الإحصائي فيها يسبب في قبول فرضية العدم H_0 .

المختبر الإحصائي: هو عبارة عن متغير عشوائي له توزيع احتمالي معلوم ويصف المختبر الإحصائي العلاقة بين القيم النظرية في المجتمع والقيم المعلومة أو القيم المحسوبة في المجتمع وعادة تقارن قيمة المختبر الإحصائي المحسوب من العينة مع قيمته المستخرجة من توزيعه الاحتمالي (الموجود في جداول خاصة) ومنها تتخذ القرارات برفض أو قبول فرضية العدم H_0 .

خطوات اختبار الفرضية:

- 1- تحديد نوع توزيع المجتمع أي هل هو توزيع طبيعي أو نوع من التوزيعات الأخرى أو توزيع معتدل. أن البحث يوضح التوزيع حول المتغير العشوائي هل هو توزيع طبيعي أو توزيع ذي حدين علماً بأن معظم الظواهر يكون توزيعها مشابه للتوزيع الطبيعي.
- 2- صياغة فرضية العدم والبديلة، تصاغ الفرضيات بلغة معالم المجتمع فمثلاً عندما يكون الاختبار عن المتوسط الحسابي بأنه يساوي قيمة معينة، فرضاً أن معدل درجات الطلبة 70 إذن فرضية العدم $H_0: \mu = 70$ والفرضية البديلة $\mu \neq 70$
- 3- اختبار مستوى المعنوية، يكون اختيار مستوى المعنوية مسبقاً من قبل الباحث وفي البحوث العلمية يأخذ مستوى المعنوية 5% (معنوي) أو 1% (معنوي جداً) وبعد ذلك تحدد منطقة القبول
- 4- المختبر الإحصائي، حيث يتم اختيار المختبر الإحصائي الذي سيكون قاعدة لاختبار الفرضيات، والمختبرات الإحصائية منها Z أو T أو X^2 أو اختبار F.
- 5- جمع البيانات من العينة وحساب المختبر الإحصائي بحسب صيغة حساب معينه نذكرها لاحقاً.
- 6- اتخاذ القرارات إذا وقعت قيمة المختبر الإحصائي في منطقة الرفض ترفض فرضية العدم وتقبل البديلة ويقال بأن هنالك فرق معنوي بين القيم النظرية للمجتمع والقيم المحسوبة من العينة وإذا وقعت قيمة المختبر في منطقة القبول تقبل فرضية العدم ويقال بأنه لا يوجد فرق معنوي بين نتائج العينة والقيم النظرية للمجتمع.

اختبار الفرضيات الخاصة بالمتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع μ :

1- اختبار Z:

شروط استخدامه

- حجم العينة العشوائية يجب أن يكون أكبر من 30 ($n \geq 30$)
 - توزيع المجتمع يجب أن يكون طبيعياً أو مقارب منه
 - تباين المجتمع σ^2 معلوم
- وهو من الاختبارات التي تستخدم في حالة متوسط حسابي واحد وبحسب المختبر الإحصائي Z من

$$Z = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{المعادلة:}$$

حيث:

$\bar{Y}$: الوسط الحسابي للعينة

μ_0 : الوسط الحسابي للمجتمع

σ : الانحراف القياسي للمجتمع، ويمكن أن يستعاض عنه بالانحراف القياسي للعينة (S)
 n : حجم العينة

بعد اختيار مستوى المعنوية فإن منطقة الرفض ومنطقة القبول ستحدد

لنفرض بأن Y يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط μ وتباين σ^2 أي:
 $Y \sim N(\mu_1, \sigma^2)$

وكانت الرغبة باختبار فرضية العدم ضد الفرضية البديلة

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

فاذا اخترنا $\alpha = 0.05$ كمستوى معنوية فمنطقة الرفض ستكون في هذه الحالة عن يمين ويسار القيمة μ_0 ، أي ذات طرفين لأن الفرضية البديلة $H_1: \mu \neq \mu_0$ يعني بأنه في حالة رفض فرضية العدم فإن μ قد تكون أقل أو أكثر من μ_0 ومنطقة الرفض هي

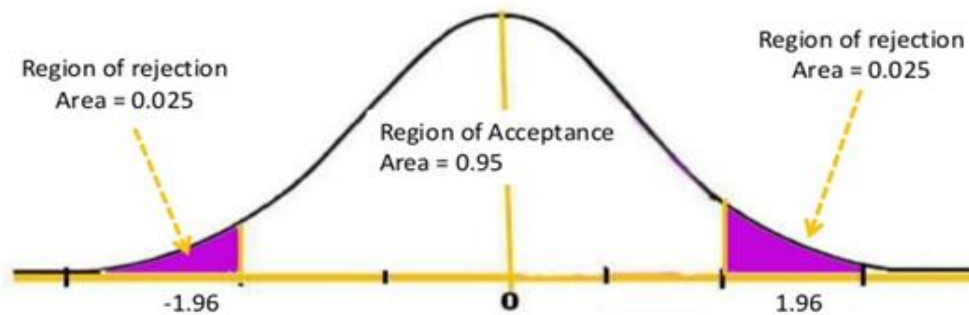
$$\mu_0 \pm Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{Y}}$$

حيث أن $Z_{\alpha/2}$ هو المتغير القياسي الذي يقطع المنحني بـ $\alpha/2$ في كلا الطرفين من التوزيع الطبيعي وبما أن $\alpha = 0.05$ أذاً

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$$

Example: Two Tailed

- Given: critical z values are ± 1.96 , $\alpha = 0.05$



جدول مناطق الرفض عند اختبار $H_0: \mu = \mu_0$ ضد ثلاث حالات من الفرضية البديلة H_1 وان: $Y \sim N(\mu_1, \sigma^2_y)$ عندما يكون حجم العينة كبير و σ^2 معلوم:

حالات الاختبار	اتخاذ القرارات		
	$\alpha = \alpha$ ترفض H_0 إذا كانت قيمة	$\alpha = 0.05$ ترفض H_0 إذا كانت قيمة	$\alpha = 0.01$ ترفض H_0 إذا كانت قيمة
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$Z \geq Z_{\alpha/2}$ and $Z \leq -Z_{\alpha/2}$ or $ Z \geq Z_{\alpha/2}$	$Z \geq 1.96$ and $Z \leq -1.96$ or $ Z \geq 1.96$	$Z \geq 2.58$ and $Z \leq -2.58$ or $ Z \geq 2.58$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$Z \geq Z_{\alpha}$	$Z \geq 1.65$	$Z \geq 2.33$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$Z \leq Z_{\alpha}$	$Z \leq -1.65$	$Z \leq -2.33$

علما ان Z في هذه الحالة هو

$$Z = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

مثال: ينتج معمل لتعليب الزيت علما متوسط وزنها 15 كغم بانحراف قياسي 0.5 كغم، أجري اختبار للتأكد من أن المعمل لازال ينتج عند المستوى المطلوب وبذلك أخذت عينة من 50 علبة ووجد أن متوسط وزنها 14.8 كغم فاذا كان وزن العلب متغير عشوائي يتوزع توزيعا طبيعيا فهل تدل العينة على أن أنتاج المعمل لازال 15 كغم، على مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

$$H_0: \mu = 15$$

$$H_1: \mu \neq 15$$

$$Z > 2.58$$

$$Z < -2.58$$

منطقة الرفض:

$$\mu_0 = 15$$

$$\bar{Y} = 14.8$$

$$\sigma = 0.5$$

$$n = 50$$

$$Z = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$Z = \frac{14.8 - 15}{\frac{0.5}{\sqrt{50}}}$$

$$Z = -2.83$$

القرار: بما أن قيمة Z المحسوبة -2.83 هي أقل من -2.58 أي أن قيمة Z المحسوبة تقع في منطقة الرفض لذا نرفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة أي أن المعمل لا ينتج علما أوزانها 15 كغم.

او بما أن قيمة Z المحسوبة المطلقة 2.83 هي أكبر من 2.58 أي أن قيمة Z المحسوبة تقع في منطقة الرفض لذا نرفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة أي أن المعمل لا ينتج علبا أوزانها 15 كغم.

مثال: إذا كان معدل انتاج احد أصناف الحنطة هو 1600 كغم هـ¹. وادعى أحد الباحثين انه استنبط سلالة من هذا الصنف يعطي انتاجا أكبر. ولاختبار صحة ادعاء الباحث اخذت عينة عشوائية مؤلفة من 81 نباتا ووجد ان متوسط انتاجها 1630 كغم هـ¹ بانحراف قياسي = 15 كغم. هل نتائج العينة تؤيد ادعاء الباحث عند مستوى معنوية = 0.01؟

الحل:

$$H_0: \mu = 1600$$

$$H_1: \mu > 1600$$

$$\alpha = 0.01$$

$$Z \geq 2.33$$

$$= 1630$$

$$n = 81$$

فرضية العدم

الفرضية البديلة

مستوى المعنوية

منطقة الرفض

المختبر الاحصائي

$$\bar{Y} \sigma = S = 15$$

$$Z = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$Z = \frac{1630 - 1600}{\frac{15}{\sqrt{81}}} = 18$$

القرار: بما ان قيمة Z المحسوبة (18) هي اكبر من قيمة Z الجدولية (2.33) لذا نرفض فرضية العدم H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 أي ان ادعاء الباحث كان صحيحا.

- اختبار Z لمتوسطين حسابيين

1- وضع فرضية العدم H_0

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d$$

علما أن d تمثل الفرق الافتراضي بين المتوسطين

2- تحديد الفرضية البديلة وتكون الفرضية البديلة أحد الاشكال الثلاثة الآتية

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > d$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < d$$

3- تحديد مستوى المعنوية α أما ان يكون 5% او 1%

4- تحديد منطقة الرفض:

ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة كما يلي

• في حالة كون الفرضية البديلة

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d$$

تكون منطقة الرفض $|Z| \geq Z_{\alpha/2}$ (القيمة المطلقة لـ Z المحسوبة)

ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة

• في حالة كون الفرضية البديلة

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > d$$

ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة عندما تكون قيمة Z المحسوبة أكبر من الجدولية
• في حالة كون الفرضية البديلة

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < d$$

ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة عندما تكون قيمة Z المحسوبة أقل من الجدولية
علما أن قيمة المختبر الاحصائي يحسب بالصيغة الرياضية:

$$Z = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 - d}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

مثال: في امتحان لمادة الاحصاء لمجموعتين من الطلبة، المجموعة الاولى من 50 طالبة متوسط درجاتهن في الامتحان 82 بانحراف قياسي (S) 8، والمجموعة الثانية من 75 طالب كان متوسط درجاتهم 76 بانحراف قياسي (S) 6، فهل يوجد فرق معنوي بين مستوى الطالبات والطلاب في مستوى معنوية 5%؟

الحل:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

فرضية العدم

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

الفرضية البديلة

مستوى المعنوية 5% اذا منطقة الرفض هي

$$|Z| \geq Z_{\alpha/2}$$

$$|Z| \geq 1.96$$

$$Z = \frac{82 - 76 - 0}{\sqrt{\frac{64}{50} + \frac{36}{75}}}$$

$$Z = \frac{6}{\sqrt{1.28 + 0.48}}$$

$$= 4.52$$

القرار: بما أن قيمة Z المطلقة المحسوبة (4.52) أكبر من Z الجدولية (1.96) لذا ترفض فرضية العدم (H_0) وتقبل البديلة (H_1) أي يوجد فرق معنوي بين درجات الطلاب والطالبات تحت مستوى احتمال 5%.

2- اختبار توزيع t المعتدل: t-Distribution

وهو من التوزيعات الاحتمالية المستمرة المهمة والمستخدم مع العينات صغيرة الحجم (أقل من 30 وأكبر من 4) وتحدد قيمة t المحسوبة وفق المعادلة التالية ونقارنها مع t الجدولية بدرجات حرية $n-1$

$$t = \frac{\bar{Y} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

مثال: لو أريد تقدير المتوسط الحسابي الحقيقي لوزن الدجاجة لمجتمع معين من الدجاج على أساس اختيار عينة عشوائية ممثلة لهذا المجتمع مكون من عشر دجاجات وكانت أوزان الدجاجات هي: 1.1, 0.8, 1.2, 1.0, 0.9, 1.2, 1.1, 0.8, 1.2, 1.2 كغم، بانحراف قياسي (S) = 0.16،

فان اختبار فرضية عدم القائلة بأن المتوسط الحسابي الحقيقي لوزن الدجاجة لمجتمع معين من الدجاج هو 1.25 كغم يتم كما يلي:

$$H_0 : \mu_x = 1.25$$

$$H_1 : \mu_x \neq 1.25$$

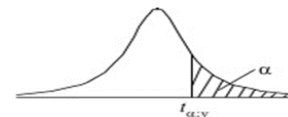
المتوسط الحسابي للعينة = 1.02 كغم

$$t = \frac{\bar{Y} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$
$$t = \frac{1.02 - 1.25}{\frac{0.16}{\sqrt{10}}}$$
$$= - 4.510$$

القرار: بما أن قيمة t المحسوبة المطلقة (4.510) تزيد على قيمة t الجدولية (2.821) بمستوى معنوية 1% ودرجات حرية 9 لذا فأننا نرفض فرضية عدم بمستوى معنوية 1%.

Table of the Student's t -distribution

The table gives the values of $t_{\alpha;v}$ where
 $\Pr(T_v > t_{\alpha;v}) = \alpha$, with v degrees of freedom



α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
v							
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

المصادر:

1. الراوي، خاشع محمود. 1989. المدخل الى الإحصاء. وزارة التعليم العالي والبحث العلمي. جامعة الموصل.

2. طبيه، احمد عبدالسميع. 2007. مبادئ الإحصاء، عمان. دار البداية. ر.أ:

www.daralbedayah.com (2007/6/1709)

David, M. Lane. Introduction to Statistics. Online Edition. .3