

REPORT TITLE :

التوزيع الطبيعي وتطبيقاته

**(The normal distribution
and its applications)**

2020-2021

Prepare the report: Mohammad Abdulkadhim Qitan

Stage: Second - Evening study

Name book: Statistics

Email: ece2013@uomustansiriyah.edu.iq

report is supervised by: Dr. Mohammad Nassif



**College of Engineering
Mustansiriyah University**

1- مقدمة

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات المتصلة حيث يلعب دوراً أساسياً في عملية المعاينة Sampling ، كما يستخدم لوصف الأنماط التكرارية للعديد من الظواهر الإحصائية مثل التغيرات الطبيعية التي تحدث للإنسان والحيوان والعوامل البيئية بشكل عام . والتوزيع الطبيعي يدرس سلوك المتغيرات العشوائية المتصلة مثل درجة الحرارة والطول والوزن والدخل والأخطاء العشوائية الناتجة عند تحليل الانحدار .

وبدراسة شكل منحنى التوزيع الطبيعي نجد أنه منحنى متماثل حول الوسط الحسابي للتوزيع ، ويأخذ الشكل الجرسى وله قمة واحدة ويمتد طرفاه إلى ما لانهاية مقتربين من المحور الأفقى شيئاً فشيئاً دون أن يتماسا مع هذا المحور . وإذا أسقطنا عموداً من قمة المنحنى على المحور الأفقى فإن هذا العمود يعتبر محوراً للتماثل لأنه يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قسمين متساويين تماماً وينطبق كل منهما على الآخر تمام الانطباق ومساحة كل قسم تساوى 50% من المساحة الكلية تحت المنحنى وينتج عن هذا التماثل أن قيم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للتوزيع الطبيعي تكون متساوية .

وحيث أن التوزيع الطبيعي يعبر عن متغيرات عشوائية متصلة فإننا لا نستطيع استخدام دالة التوزيع له لإيجاد احتمال أن يأخذ المتغير العشوائى الذى يتبعه لقيمة معينة حيث أن هذا الاحتمال يساوى صفراً . ولكن يمكن استخدام دالة التوزيع الطبيعي لإيجاد احتمال أن يأخذ المتغير العشوائى أقل من قيمة معينة أو أكثر من قيمة معينة أو تقع قيمته بين قيمتين معلومتين.

كذلك يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها استعمالاً على الإطلاق ، بل انه يحتل موضع الصدارة في الاحتمالات والاحصاء ، وقد اش تق اسمه من أن كثيراً من التوزيعات "الطبيعية" تأخذ شكلاً قريباً منه ، كذلك فإن معظم التوزيعات البيومترية (كتوزيعات الطول والوزن) وتوزيعات أخطاء المشاهدات (الفروق بين القيم الحقيقية والقيم المشاهدة) تأخذ شكلاً قريباً منه ، ويستخدم هذا التوزيع في كثير من التجارب الصناعية

واختبارات الجوده وله استخدامات واسعه في اختبارات الفروض والعينات الكبيرة وتوزيعات المعايينه وغيرها.

كان أول من اكتشفت هذا التوزيع العالم دي موافر De Moiver عام 1733 ومن بعده العالم Gauss عام 1809 ويعرف هذا التوزيع أيضاً باسمه أي توزيع غوس Gauss Distribution ولهذا التوزيع خواصه الرياضية ويمكن ان يكون تقريباً أو حالة خاصة لتوزيعات أخرى مثل توزيع ثنائي الحدين.

2- أهمية التوزيع الطبيعي إلى الأسباب الآتية :

1. يستخدم التوزيع الطبيعي في وصف العديد من المتغيرات العشوائية في الواقع العملي مثل الأطوال والأوزان لمجموعة من الأشخاص ، درجات الطلاب في امتحان مقرر معين ، أخطاء القياس الناتجة من تجربة ما ، حيث تتوزع القياسات المشاهدة (التكرارات) بشكل متماثل حول قيمة مركزية هي قيمة متوسط التوزيع وتقل هذه القياسات تدريجياً كلما ابتعدنا عن هذه القيمة إلى جهة اليمين أو إلى جهة اليسار ، حيث يأخذ منحنى التوزيع الشكل الجرسى .

2. يعتبر التوزيع الطبيعي تقريباً مفيداً للعديد من التوزيعات المتقطعة وغير المتقطعة مثل توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون وتوزيع هيبرجيومترك وغيرها .

3. يعتبر التوزيع الطبيعي حجر الزاوية في الاستدلال الإحصائي حيث تتوزع معالم المجتمع المقدرة من العينة مثل المتوسط مثلاً كالتوزيع الطبيعي وهذا ما سوف تناوله في معرض حديثنا عن نظرية النهاية المركزية .

3- تطبيقات المنحنى العادي

في الأبحاث النفسية ، يكون للمنحنى الطبيعي التطبيق العملي الرئيسي الموضح أدناه:

- يساعد المنحنى الطبيعي في تحويل الدرجات الأولية إلى درجات قياسية.

- بمساعدة المنحنى العادي يمكننا حساب الترتيب المئوي للدرجات المعطاة.

- يتم استخدام منحى عادي لإيجاد الحدود في أي توزيع عادي يتضمن المعطى النسبة المئوية للحالات.

- يمكننا مقارنة توزيعين من حيث التداخل بمساعدة المنحى العادي.

- يتم استخدام منحى عادي لتحديد الصعوبة النسبية لأسئلة الاختبار والمشكلات وعناصر الاختبار الأخرى.

- عندما يتم توزيع السمة بشكل طبيعي ، يتم استخدام المنحى الطبيعي لفصل مجموعة معينة إلى مجموعات فرعية حسب السعة.

4- خصائص التوزيع الطبيعي

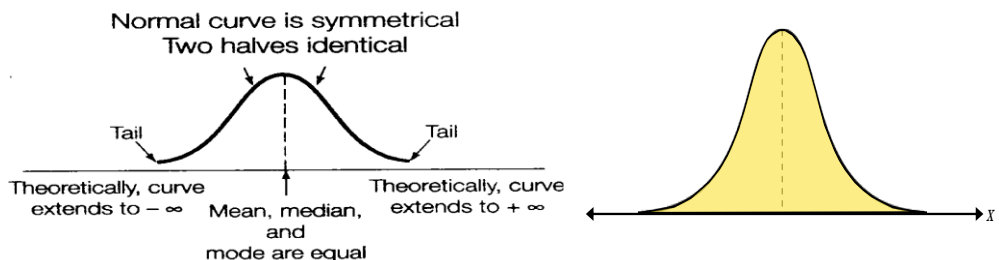
يتميز التوزيع الطبيعي بالخصائص الآتية إجمالاً :

1. منحى التوزيع الطبيعي منحى متماثل حول متوسط التوزيع والذي يرمز له بالرمز μ .

2. التوزيع الطبيعي له قيمة واحدة وهذا طبعاً يعطينا استنتاج بأن له منوال واحد يساوي μ .

ويساوي الوسيط أيضاً. $\mu = Mo = Me$.

3. المساحة تحت منحى التوزيع الطبيعي تساوى الوحدة المربعة وهذه المساحة تعبر عن مجموع الاحتمالات . وكما ذكرنا أن الخط الرأسى الساقط من قمة المنحى على المحور الأفقى عند المتوسط يقسم المساحة إلى نصفين متساويين 50% من المساحة الكلية على يمين الخط العمودى ، 50 % من المساحة الكلية على يساره .

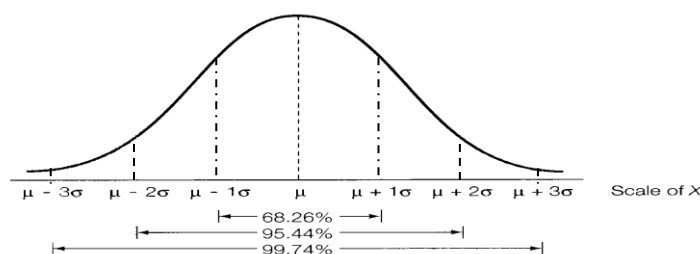


4. إذا أسقطنا عمودين على بعد انحراف معياري واحد إلى يمين ويسار متوسط التوزيع فإن المساحة التي يحصرها هذين العمودين تمثل 68.26% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . كذلك نجد أن المساحة التي يحصرها العمودان المقامان عند 2 انحراف معياري على جانبي متوسط التوزيع تمثل 95.44% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . أما المساحة التي يحصرها العمودان المقامان عند 3 انحرافات معيارية على جانبي متوسط التوزيع فتمثل 99.74% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . هذا ويمكن التعبير عما سبق رمزيا كالآتي :

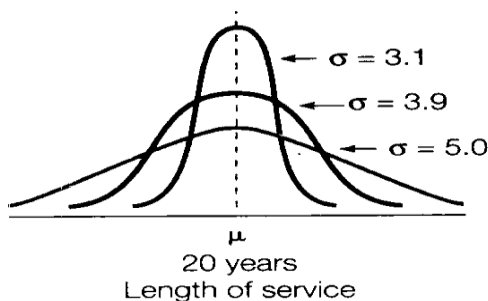
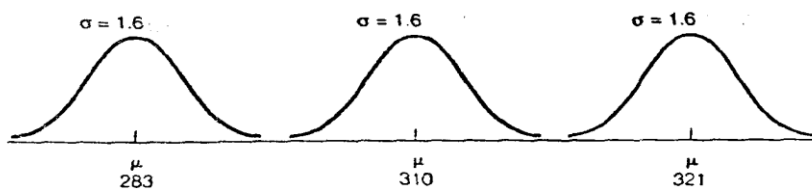
$$p(\mu - 1\sigma < x < \mu + 1\sigma) = 0.6826$$

$$p(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = 0.9544$$

$$p(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = 0.9974$$



5. التوزيع الطبيعي ليس توزيعاً وحيداً ولكنه يمثل عائلة من التوزيعات الطبيعية ، وكل توزيع من هذه العائلة يمكن تحديده وتعريفه بدقة متى عرفت معالمه وهي المتوسط ويرمز له بالرمز μ ، والانحراف المعياري ويرمز له بالرمز σ ، حيث تحدد قيمتي هاتين المعلمتين شكل منحنى التوزيع ، حيث تحدد قيمة المتوسط μ موقع التوزيع على المحور الأفقي من نقطة الأصل ، كما تحدد قيمة الانحراف المعياري مدى تشتت التوزيع فكلما كانت σ كبيرة كلما زاد تشتت القيم وبالتالي اتساع المنحنى .



5- دالة كثافة الاحتمال Probability Density Function

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X تعطى بالعلاقة :

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < X < \infty$$

$$, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0$$

وحيث أن استخدام هذه الدالة لحساب الاحتمالات المختلفة تكتنفه صعوبات رياضية كثيرة تعتمد بالدرجة الأولى على معرفة تامة بعلم التكامل ، علاوة على أنه كما ذكرنا يوجد عدد لا نهائي من التوزيعات الطبيعية والتي تحدد كل منها قيم المعلمتين μ ، σ فإنه لحسن الحظ يمكن تحويل أى توزيع طبيعى إلى توزيع طبيعى عيارى له جداول خاصة تعرف باسم جداول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي العيارى متى علم متوسطه وانحرافه المعياري .

6- التوزيع الطبيعي العياري Standard Normal Distribution

إذا كان X متغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن Z تتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط صفر، وانحراف معياري يساوى الواحد الصحيح حيث:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

وتسمى Z أيضا بالقيمة المعيارية أو الدرجة المعيارية وهى تساعد على إيجاد المساحة أو الاحتمال المطلوب أسفل أى منحنى توزيع طبيعى وذلك باستخدام جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي العياري . هذا وتأخذ دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z الشكل الآتى :

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}, \quad -\infty < Z < \infty$$

ومن الجدير بالذكر هنا أن الدالة لا تعتمد على معالم مجهولة القيمة وبالتالي فقد استخدمت فى حساب جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي العياري المشار إليه بعاليه .

6.1- خصائص المنحنى الطبيعي العياري

1. المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع الطبيعي العياري تساوى الواحد الصحيح بحيث يقسم الخط العمودى الواصل من قمة المنحنى إلى الصفر (متوسط التوزيع) المساحة إلى قسمين متساويين مساحة كل منهما تساوى 0.05 .

2. منحنى التوزيع الطبيعي العياري متماثل حول متوسطه ، وبالتالي فإن التواءه يساوى صفر وتفرطه يساوى 3 .

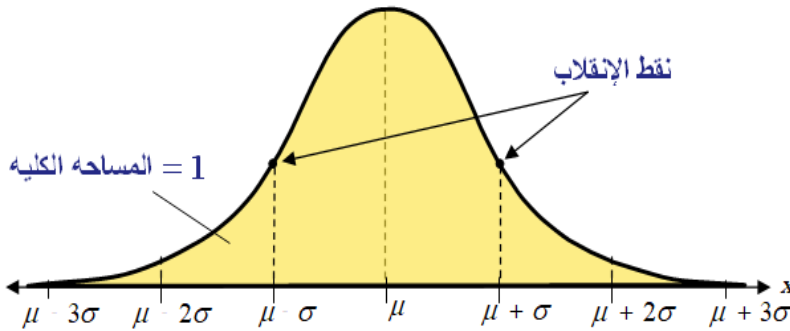
3. المساحة المحصورة بين ± 1 درجة معيارية تساوى 68.26% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . والمساحة المحصورة بين ± 2 درجة معيارية

تساوى 95.44% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . أما المساحة المحصورة بين ± 3 درجات معيارية تساوى 99.74% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . هذا ويمكن التعبير عن ذلك رمزيا كالآتى :

$$P (-1 < Z < 1) = 0.6826$$

$$P (-2 < Z < 2) = 0.9544$$

$$P ((-3 < Z < 3) = 0.9974$$



مثال (1)

إذا كان العمر الافتراضى لمشغل الأقراص المرنة والمنتج بمعرفة إحدى شركات الكمبيوتر يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط 1000 ساعة وانحراف معيارى 100 ساعة . فإذا تم اختيار وحدة مشغل من إنتاج هذه الشركة بطريقة عشوائية ، فأوجد احتمال أن يكون عمرها الافتراضى :

1. بين 1000 ، 1150 ساعة .

2. أقل من 930 ساعة .

3. أكبر من 780 ساعة .

4. بين 700 ، 1200 ساعة .

5. بين 750 ، 850 ساعة .

الحل :

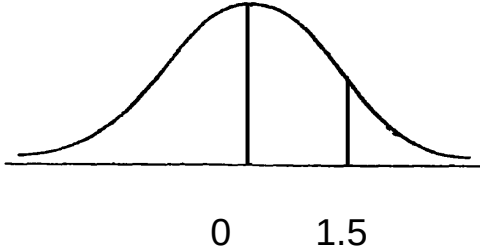
نفرض أن المتغير العشوائى X يعبر عن العمر الافتراضى لمشغل الأقراص المرنة ،
أى أن :

المتوسط $\mu = 1000$ ساعة

الانحراف المعياري $\sigma = 100$ ساعة

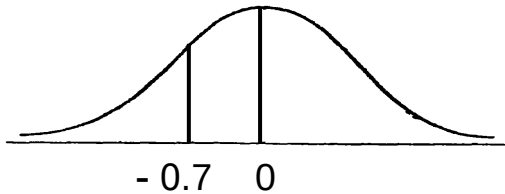
1. احتمال أن يكون العمر الافتراضى لمشغل الأقراص المرنة بين 1000 ، 1150 ساعة

$$P(1000 \leq X \leq 1150) = P\left(\frac{1000 - 1000}{100} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{1150 - 1000}{100}\right)$$
$$= P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$$



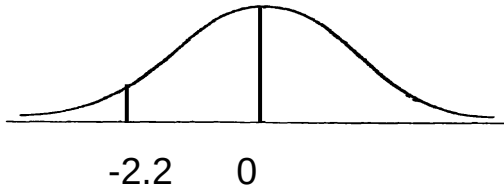
2- احتمال أن يكون العمر الافتراضى لمشغل الأقراص المرنة أقل من 930 ساعة

$$P(X < 930) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{930 - 1000}{100}\right) = P\left(Z < \frac{-70}{100}\right)$$
$$= p(Z < -0.7) = 0.5 - 0.2580 = 0.2420$$



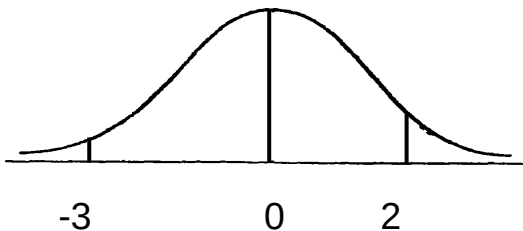
3. احتمال أن يكون العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة أكبر من 780 ساعة

$$\begin{aligned} P(X > 780) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{780 - 1000}{100}\right) = P\left(Z > \frac{-220}{100}\right) \\ &= P(Z > -2.2) = 0.5 + P(-2.2 < Z < 0) \\ &= 0.5 + P(0 < Z < 2.2) \\ &= 0.5 + 0.4861 = 0.9861 \end{aligned}$$



4. احتمال أن يكون العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة بين 700 ، 1200 ساعة

$$\begin{aligned} p(700 \leq X \leq 1200) &= P\left(\frac{700 - 1000}{100} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{1200 - 1000}{100}\right) \\ &= P\left(\frac{-300}{100} \leq Z \leq \frac{200}{100}\right) = P(-3 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-3 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 3) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.4987 + 0.4772 = 0.9759 \end{aligned}$$



5. احتمال أن يكون العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة بين 750 ، 850 ساعة

$$P(750 \leq X \leq 850) = P\left(\frac{750 - 1000}{100} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{850 - 1000}{100}\right)$$

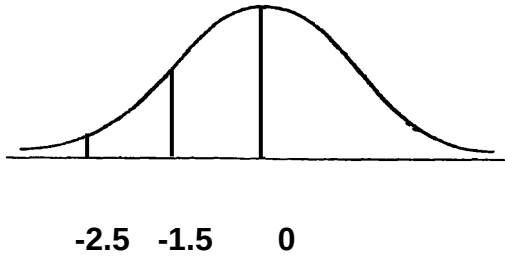
$$= P\left(\frac{-250}{100} \leq Z \leq \frac{-150}{100}\right)$$

$$= P(-2.50 \leq Z \leq -1.50)$$

$$= P(-2.50 \leq Z \leq 0) - P(-1.50 \leq Z \leq 0)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2.50) - P(0 \leq Z \leq 1.50)$$

$$= 0.4938 - 0.4332 = 0.0606$$



ملاحظة :-

التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين

يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين إذا تحققت الشروط

الآتية :

1. حجم العينة يكون كبيراً ($n \geq 30$)
2. المتوسط يكون أكبر من أو يساوى 5 ($\mu = np \geq 5$)
3. التباين يكون أكبر من أو يساوى 5 ($\sigma^2 = np(1-p) \geq 5$)

مثال 2 : افترض ان هناك اوزان لمجموعة من الطالب تتوزع توزيع طبيعي بوسط (140

) وانحراف معياري (25) فاذا تم اخذ شخص عشوائيا من هذه المجموعة فمت هو احتمال

1 - ان يكون وزنه بين 100 و 160 كغم.

2 - ان يكون وزنه اقل من 160 كغم .

3 - ان يكون وزنه اكثر من 180 كغم.

4 - اذا افترضنا بأن هذه المجموعة هي 40 شخص ماهو عدد الأشخاص الذين يملكون وزن

اقل من 170 كغم.

الحل :

نفرض ان اوزان هذه المجموعة هي متغير عشوائي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ بحيث

$$\begin{aligned} 1- P(100 < X < 160) &= P\left(\frac{100-140}{25} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{160-140}{25}\right) = P(-1.6 < Z < 0.8) \\ &= P(Z < 0.8) - P(Z < -1.6) = P(Z < 0.8) - [1 - P(Z < 1.6)] \\ &= 0.7881 - [1 - 0.9452] = 0.733 \end{aligned}$$

$$2- P(X < 160) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{160-140}{25}\right) = P(Z < 0.8) = 0.7881$$

$$\begin{aligned} 3- P(X > 180) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{180-140}{25}\right) = P(Z > 1.6) = 1 - P(Z \leq 1.6) \\ &= 1 - 0.9452 = 0.0548 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4- P(X < 170) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{170-140}{25}\right) = P(Z < 1.2) \\ &= 0.8849 \end{aligned}$$

شخص وزنهم اقل من 170 كغم $n * p(z < 170) = (40)(0.8849) = 35.39 \cong 35$

7-المصادر

- 1- https://www.researchgate.net/publication/347439121_Characteristics_of_Normal_Distribution- by:Hewa Hassan and Jwan Shkak -Soran University
- 2-جامعة البصرة - كلية الادارة والاقتصاد- قسم الإحصاء-المرحلة الثالثة - الإحصاء الحيوي - م . م. علي عبد الزهرة حسن.
- 3- موقع : <https://normaldistributionskh.wordpress.com>
- 4- موقع : توزيع_احتمالي_طبيعي/ https://ar.wikipedia.org/wiki/توزيع_احتمالي_طبيعي
- 5- موقع : <https://samehar.wordpress.com/2010/02/11/normal-distribution>