



أسس التحليل الإحصائي متعدد المتغيرات

Principles Of Multivariate Statistical Analysis

الدكتور

إبراهيم محمد العلي

أستاذ في قسم الإحصاء والبرمجة
كلية الاقتصاد - جامعة تشرين - سورية

اللاذقية - سورية

2020 م - 1441 هـ

الفهرس العام

الموضوع	الصفحة
المقدمة:	5
الجزء الأول: قضايا المصفوفات	7
الفصل الأول: المصفوفات والعمليات المعرفة عليها .	9
الفصل الثاني: قضايا القيم والأشعة الذاتية للمصفوفات الشاذة .	25
الجزء الثاني: الاستدلال الإحصائي .	47
الفصل الأول: الاستدلال بواسطة الفرضيات البسيطة .	49
الفصل الثاني: الاستدلال بواسطة الاستبيان .	83
الفصل الثالث: الاستدلال حول طبيعة المتحولات العشوائية .	109
الفصل الرابع: الاستدلال حول شعاع واحد لعدة المتوسطات .	155
الفصل الخامس: الاستدلال حول شعاعين لعدة متوسطات .	195
الفصل السادس: الاستدلال بواسطة تحليل التباين البسيط .	229
الفصل السابع: الاستدلال بواسطة تحليل التباين المتعدد .	271
الجزء الثالث: الانحدار الخطي المتعدد والارتباط القانوني .	307
الفصل الأول: الانحدار الخطي البسيط .	309
الفصل الثاني: الانحدار الخطي المتعدد والمضاعف .	329
الفصل الثالث: الارتباط القانوني (العام والمعياري) .	373
الجزء الرابع: التحليل العاملي (العوامل) .	431
الفصل الأول: مفاهيم التحليل العاملي .	433
الفصل الثاني: طرائق استخلاص العوامل وحساب أمثالها .	463
الفصل الثالث: قضايا التدوير .	517
الفصل الرابع: طرائق حساب العوامل العامة F_p بدلالة المتحولات Z_p	557
الجزء الخامس: قضايا التمييز والتصنيف	569
الفصل الأول: المفاهيم العامة للتحليل التمييزي .	573
الفصل الثاني: التحليل التمييزي البسيط (لمتحول ومجموعتين) .	579
الفصل الثالث: التحليل التمييزي الخطي (لمتحولين ومجموعتين) .	597
الفصل الرابع: التحليل التمييزي المتعدد (لعدة متحولات وعدة مجموعات) .	631
الفصل الخامس: التحليل التمييزي النوعي (شجرة التصنيف والانحدار CART) .	681

الصفحة	الموضوع
709	الفصل السادس: التحليل اللوجستي .
737	الفصل السابع: التحليل العنقودي .
781	الملاحق: الجداول الإحصائية:
782	قيم تابع التوزيع الطبيعي المعياري Z .
783	قيم متحول توزيع (ستودينت) .
784	قيم متحول توزيع χ^2 .
785	قيم متحول توزيع F .

المقدمة :

إن الأبحاث الحديثة في مجالات العلوم المختلفة، أصبحت تتناول عدة متحولات كمية أو نوعية ، وينتج عنها بيانات متعددة . وإن معالجة هذه البيانات المتعددة أدت إلى ظهور فرع جديد في الإحصاء هو التحليل الإحصائي متعدد المتغيرات (Multivariate Statistical Analysis)، وإن هذا التحليل يقدم للباحثين طرائق إحصائية متطورة لتوصيف وتحليل واختبار تلك البيانات المتعددة، وتحديد العلاقات بينها والتنبؤ بسلوكها من أجل العمل على إدارتها والتحكم بها .

ويمكن القول أن التحليل الإحصائي متعدد المتغيرات هو تعميم للتحليل العادي لمتحول واحد أو لمتحولين، وعندما يعمل الإنسان بهذا التحليل ينقل من السير على الطريق إلى الطيران في الفضاء . وإني عندما اطلعت على بعض جوانب هذا الفضاء ترددت في الإقدام عليه، خوفاً من الضياع فيه ، ولكني قررت أخيراً أن أدخل إليه متسلحاً بمعارفي الرياضية اللازمة ومعتمداً على وسائل العلمية المتوفرة، وأن أقوم بتأليف كتاب مرجعي عنه، لأضعه بين أيدي الباحثين العرب للاستفادة منه في أبحاثهم العلمية ، من خلال تطبيق طرائقه المختلفة في جميع المجالات الحياتية والاقتصادية والاجتماعية والبيولوجية والطبيعية.. الخ، وآمل أن أكون قد وفقت في ذلك.

ورأيت أن أصنف موضوعات هذا الكتاب ضمن خمسة أجزاء تتضمن 23 فصلاً، وهي كما يلي:

الجزء الأول: قضايا المصفوفات (فصلان) .

الجزء الثاني: الاستدلال الإحصائي (7 فصول) .

الجزء الثالث: الانحدار الخطي المتعدد والارتباط القانوني (3 فصول) .

الجزء الرابع: التحليل العاملي (العوامل) (4 فصول) .

الجزء الخامس: قضايا التمييز والتصنيف (7 فصول) .

وهنا أود أن أطمئن القارئ الكريم بأنه يستطيع أن يقوم بدراسة هذا التحليل وفهمه وتطبيقه، إذا كانت لديه خلفية رياضية بسيطة، ومعرفة عامة بنظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي، ودراية عامة بقضايا المصفوفات وقيمها الذاتية... الخ. لذلك رأيت أن أخصص الجزء الأول منه لقضايا المصفوفات، لاستعراض أنواعها والتعريف بخواص العمليات المعرفة عليها وكيفية الحصول على قيمها وأشعتها الذاتية. وأنصح القارئ الكريم أن يبدأ بمراجعة هذا الجزء قبل الدخول إلى فصول التحليل المتتالية، والعودة إليه عند كل حاجة. ولتسهيل فهم الأفكار الواردة في الفصول المختلفة وضعت في مستهل كل فصل تمهيداً خاصاً لشرح بعض المفاهيم اللازمة له، ثم دعمته بعدد من الأمثلة التطبيقية لتوضيح معاني الطرائق الرياضية المستخدمة فيه وشرحت كيفية تطبيقها على المشكلات الحياتية الفعلية .

وإني إذ أقدم هذا الكتاب للباحثين العرب وأنشره لهم على عدة مواقع الكترونية، لا أدعي فيه كمالاً ولا شمولاً، وأعتذر من القراء الكرام عن أي خطأ لم ألاحظه، وعن أي سهو لم أتداركه، وعن أي نقص لم

أعاليه، وآمل منهم أن يوافوني بأرائهم فيه وبملاحظاتهم عليه، حتى أتمكن من تصحيح تلك الهفوات المتوقعة . كما أرجو منهم الإشارة إليه عند الاستفادة منه .

وختاماً أتقدم بالشكر الجزيل للزملاء الذين ساعدوني في تدقيق ونشر هذا الكتاب وهم السادة الدكاترة: عبد الهادي الرفاعي، محمد عكروش، أيمن العشعوش، عز الدين حيدر، طالب أحمد، فادي خليل، محمود حسين، وسيم أحمد، ياسر علوش، رسلان العلي، ولطلاب الدكتوراة: لمى منلا، علا خدوج ، خضر عكاري، كما أخص بالشكر الآنسة سوزان صقر التي قامت على طباعته بكل صبر وإتقان .

والله من وراء القصد

اللاذقية في 2020/02/15

المؤلف

أ. د. إبراهيم محمد العلي

أسس

التحليل الإحصائي متعدد المتغيرات

الجزء الأول

قضايا المصفوفات

الفصل الأول: المصفوفات والعمليات المعرفة عليها .

1-1: الأشعة .

2-1: المصفوفات وأنواعها .

3-1: خواص العمليات على المصفوفات .

4-1: المحددات (المعينات) .

5-1: رتبة المصفوفة .

6-1: أثر المصفوفة .

7-1: القيم الذاتية والمصفوفات الشاذة.

8-1: معكوس المصفوفة (شبه المقلوب)

9-1: قواعد اشتقاق المصفوفات

10-1: الصيغة التربيعية والمسافات.

الفصل الثاني: قضايا القيم الذاتية والمصفوفات الشاذة :

1-2: تمهيد .

2-2: المشكلة النموذجية للقيم الذاتية .

3-2: نظريات مختلفة حول القيم والأشعة الذاتية .

4-2: نظريات مكملية .

5-2: مصفوفة الجذر التربيعي .

6-2: مصفوفة المتراجحات والتعظيم .

7-2: مسألة تعظيم الصيغة التربيعية .

المراجع :

الفصل الأول

المصفوفات والعمليات المعرفة عليها

1-1 : الأشعة :

تلعب الأشعة والمصفوفات دوراً كبيراً في التحليل متعدد المتغيرات. وبدون أن نشرح أنواعها وخواصها نعرضها وفق التالي:

• تعريف الشعاع: يتألف الشعاع المتعدد X من عدة متحولات كمية نرمز لها بـ $X_1, X_2, \dots, X_p$,

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \quad \text{ونكتبها على شكل عمود } X \text{ كما يلي:}$$

كما نرمز لمنقلبه بـ X' ، الذي يكتب على شكل سطر كما يلي:

$$X' = [X_1, X_2, X_3, \dots, X_p] \quad (1-1)$$

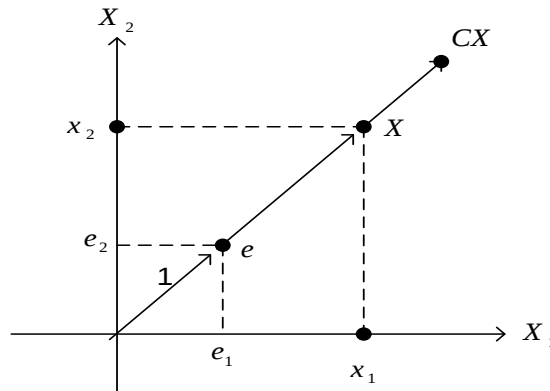
ويعرف الشعاع البسيط (العددي) X في الفضاء R^p بعلاقة مشابهة ويرمز بمائلة (وسنرمز لمركباته العددية بـ x_j). وبناءً على ذلك نعرف مربع طوله من خلال الجداء الشعاعي التالي:

$$\|X\|^2 = X' * X = (x_1, x_2, \dots, x_p) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2$$

وبذلك يكون طوله $\|X\|$ مساوياً لـ :

$$\|X\| = \sqrt{X' * X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2} \quad (2-1)$$

وإن القيم العددية لهذه المركبات تمثل إحداثيات النقطة X في الفضاء R^p ، فإذا كان $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ فإنه يرسم في المستوى كما يلي :



الشكل (1-1) تمثيل وتمديد وتقليص الأشعة في المستوى

ويمكن تمديد وتقليص الشعاع X بضربه بثابت C ، فنحصل على الشعاع CX ، كما يمكن تحويل الشعاع X إلى الشعاع الواحدي الممعي e ، الذي يكون طوله مساوياً للواحد ويكون اتجاهه باتجاه X ، كما في الشكل (1-1)، ونحصل على مركبات e بتقسيم مركبات X على طوله ℓ_x .

وللحصول على مركبات الشعاع الواحدي e من الشعاع X نقوم بما يلي:

1- نحسب طول الشعاع X من العلاقة (2-1) كما يلي:

$$\ell_x = \sqrt{X' * X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_p^2} = \|X\|$$

2- ثم نقسم كل مركبة من مركبات X على طوله ℓ_x فنحصل على الشعاع الواحدي الممعي التالي:

$$e = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\ell_x} \\ \frac{x_2}{\ell_x} \\ \frac{x_3}{\ell_x} \\ \vdots \\ \frac{x_p}{\ell_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_p \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

وللتأكد من أن طول هذا الشعاع يساوي الواحد نجد أن :

$$\|e\| = \ell_e = \sqrt{e' * e} = \sqrt{\left(\frac{x_1}{\ell_x}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\ell_x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_p}{\ell_x}\right)^2} = 1$$

ويستخدم الشعاع الواحدي e في التعبير عن الحول المختلفة في التحليل متعدد المتغيرات ويدخل في حساب الأشعة الذاتية للمصفوفات.

• خاصية التعامد: إذا كان X و Y شعاعان متعامدان (في نفس الفضاء) فإن جداءهما السلمي يساوي الصفر، أي إذا كان X و Y متعامدان فإن:

$$X' * Y = Y' * X = 0 \quad (4-1)$$

ويمكن كتابة هذا الجداء على الشكل التالي:

$$X' * Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_p y_p = 0 \quad (5-1)$$

أما إذا كان X و Y غير متعامدين فإن جداءهما يساوي:

$$X' * Y = Y' * X = \ell_x \ell_y \cos \theta \quad (6-1)$$

حيث أن θ هي الزاوية المحصورة بينهما .

1-2 : أنواع المصفوفات وخواصها:

• تعريف المصفوفة: تعرف المصفوفة بأنها جملة من الأعداد الحقيقية أو المركبة، الموضوعة على شكل أسطر وأعمدة ضمن مستطيل (أو مربع) مؤلف من p سطراً و n عموداً، ونرمز لها بالرمز A_{p*n} ، (ويسمى $p * n$ مرتبة (order) المصفوفة A) ونكتبها كما يلي:

$$A_{p \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix} \quad (7-1)$$

- منقول المصفوفة A: ونرمز له بـ A' ويتم الحصول عليه باستبدال أسطرها بأعمدتها أو أعمدتها بأسطرها. فنحصل على مصفوفة جديدة من المرتبة $n \times p$ ونرمز لها بـ $A'_{n \times p}$
- الجمع والطرح: يمكن أن نجمع أو نطرح أي مصفوفتين إذا كانتا من نفس المرتبة ، وذلك بجمع أو طرح عناصرهما المتقابلة، فنحصل على مصفوفة ثالثة من نفس المرتبة كما يلي :

$$A_{p \times n} \pm B_{p \times n} = C_{p \times n} \quad (8-1)$$

- الضرب: يمكن ضرب أي مصفوفتين إذا كان عدد أعمدة الأولى (اليسرى) يساوي عدد أسطر اليمنى، فنحصل على مصفوفة جديدة ، ويتم حساب عناصرها على الترتيب من جراء ضرب كل سطر من الأولى بعمود من الثانية (ضرب أشعة) كما يلي:

$$A_{p \times n} * C_{n \times k} = B_{p \times k} \quad (9-1)$$

- القسمة: إن عملية القسمة على المصفوفات غير معرفة وتستبدل بالضرب في مقلوب المصفوفة.
- 1-2-1- المصفوفات المربعة:** ولها عدة أنواع هي:

- المصفوفة النظامية (غير الشاذة unsingular): وهي المصفوفة المربعة A التي تكون قيمة

محدداتها $|A|$ غير معدومة . أي التي يكون محددها (انظر المحددات لاحقاً):

$$|A| \neq 0 \quad (10-1)$$

وهذا يعني أن أعمدة (أو أسطر) المصفوفة تكون مستقلة عن بعضها البعض .

- المصفوفة الشاذة (singular): وهي المصفوفة المربعة A التي تكون قيمة محددها $|A|$

معدومة . أي التي يكون محددها (انظر المحددات لاحقاً):

$$|A| = 0 \quad (10a-1)$$

وهذا يعني أن أعمدة (أو أسطر) المصفوفة تكون غير مستقلة عن بعضها البعض .

- مقلوب المصفوفة المربعة A: ونرمز له بـ A^{-1} وهو مصفوفة مربعة تحقق العلاقة التالية:

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = I \quad (11-1)$$

حيث I هي المصفوفة الواحدية من مرتبة A (انظر لاحقاً) . ويتم حساب A^{-1} من العلاقة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * M'$$

حيث أن M' هي منقول المصفوفة المساعدة المؤلفة من مصغرات المصفوفة A مع تناوب الإشارة .

- المصفوفة المتناظرة: هي مصفوفة مربعة تكون عناصرها المتناظرة بالنسبة لقطرها الرئيسي متساوية، أي يكون فيها :

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i \neq j) \quad (12-1)$$

ومن التعريف نستنتج أنه إذا كانت A متناظرة فإن $A' = A$.

- المصفوفة القطرية: وهي مصفوفة مربعة تكون جميع عناصرها الواقعة خارج قطرها الرئيسي معدومة. ونرمز لها بـ D_{diag} حيث أن :

$$D_{diag} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} : a_{ij} = 0 \quad i \neq j \quad (13-1)$$

ونشير هنا إلى أن مقلوب هذه المصفوفة القطرية يساوي مصفوفة قطرية أيضاً، وإن عناصر قطرها الرئيسي تساوي مقاليب عناصر المصفوفة القطرية الأصلية . أي أن:

$$D_{diag}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{44}} \end{bmatrix} : a_{ij} = 0 \quad i \neq j \quad a_{ii} \neq 0 \quad (14-1)$$

- المصفوفة الواحدية: ونرمز لها بـ I وهي مصفوفة قطرية وتكون عناصرها القطرية تساوي الواحد، ونكتب ذلك على الشكل :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15-1)$$

ومن (15-1) نستنتج أن: $I^{-1} = I$ وأن: $I' = I$.

- المصفوفة المتعامدة : ونرمز لها بـ Q وهي التي تكون الأشعة المؤلفة لأعمدها متعامدة، وهي تحقق العلاقة التالية:

$$Q' * Q = Q * Q' = I \quad (16-1)$$

ومنها ومن العلاقة (16-1) نستنتج أن:

$$Q' = Q^{-1} \quad (17-1)$$

أي أن Q^{-1} مقلوب المصفوفة المتعامدة Q يساوي منقولها Q' .

وتتميز هذه المصفوفات بأن جداءات الأعمدة فيها معدومة (لأنها متعامدة) أي أن:

$$q'_i * q_j = 0 \quad \text{for } i \neq j \quad (18-1)$$

- المصفوفة المتعارضة: نقول عن المصفوفة C إنها متعارضة إذا كانت عناصرها مؤلفة من 1 و 0 وكان مجموع عناصر كل سطر فيها يساوي الواحد، وكانت أسطرها مستقلة مثل:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1-3 : خواص العمليات على المصفوفات :

أ- خواص عمليات الجمع والطرح: إذا كانت A و B و C مصفوفات من نفس المرتبة $m * n$ وكان e و d عددين حقيقيين، فإنها تحقق الخواص التالية:

$$\begin{aligned} 1 - A \pm B &= B \pm A \\ 2 - (A \pm B) \pm C &= A \pm (B \pm C) \end{aligned} \quad (19 - 1)$$

$$3 - C(A \pm B) = CA \pm CB$$

$$4 - (e + d)A = eA + dA$$

$$5 - (ed)A = e(dA)$$

$$6 - (A + B)' = A' + B'$$

ب- خواص الضرب: إذا كانت A و B و C متوافقة في المراتب لإجراء الضرب، وكان e عدداً، فإنها تحقق الخواص التالية (إن عملية القسمة على مصفوفة A غير معرفة وتستبدل بالضرب بمقلوبها):

$$\begin{aligned} 1 - e(A * B) &= (eA) * B = A * (eB) \\ 2 - A(B * C) &= (AB) * C \\ 3 - A(B + C) &= AB + AC \end{aligned} \quad (20 - 1)$$

$$4 - (B + C) * A = B * A + C * A$$

$$5 - A * B \neq B * A \quad (\text{ولكن بصورة عامة})$$

$$6 - e * A * B = A * (e * B) \quad : \quad (e = \text{عدد})$$

$$7 - (A * B)' = B' * A'$$

$$8 - (A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$$

ج- خواص المنقول : إذا كانت A و B مصفوفتان متوافقتان في الجمع والضرب ، أي إنهما تحققان الشروط اللازمة لذلك، فإن :

$$\begin{aligned} 1 - (A + B)' &= A' + B' \\ 2 - (e * A)' &= eA' \end{aligned} \quad (e = \text{عدد}) \quad (21 - 1)$$

$$3 - (A * B)' = B' * A' \quad (\text{الجداء معكوس})$$

$$4 - (A')' = A$$

د- خواص المقلوب : وهي خواص مشروطة بالمصفوفات المربعة:

إذا كانت A و B مربعيتين ونظاميتين فيكون لهما مقلوبان A^{-1} و B^{-1} ، وإذا كانتا متوافقتان من حيث الضرب ، فإنهما تحققان الخواص التالية :

$$\begin{aligned} 1 - A * A^{-1} &= A^{-1} * A = I \\ 2 - (A^{-1})^{-1} &= A \end{aligned} \quad (22 - 1)$$

$$3 - (A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1} \quad (\text{الجداء معكوس})$$

$$4 - (A^{-1})' = (A')^{-1}$$

$$5 - (eA)^{-1} = \frac{1}{e} * A^{-1} \quad (e = \text{عدد})$$

1-4 : المحددات (المعينات):

- تعريف المحدد: يعرف المحدد على المصفوفات المربعة فقط ، وهو عدد يعبر عن قيمة كامل المصفوفة، ويرمز له بـ $|A|$ ، ويمكن حساب قيمته بنشر المحدد حسب الأسطر أو الأعمدة وحساب الجداءات اللازمة حسب الطرائق المعروفة.
- خواص المحددات (المعينات) : إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من المرتبة $n \times n$ فإن محديهما يحققان الخواص التالية:

$$1 - |A| = |A'| \quad (23 - 1)$$

$$2 - |A * B| = |A| * |B|$$

$$3 - |eA| = e^n |A| \quad (e \text{ عدد حقيقي})$$

$$4 - |A * A^{-1}| = 1$$

$$5 - |A * A^{-1}| = |A| * |A^{-1}| = 1$$

$$6 - |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$$

$$7 - |A| = 0 \quad \text{إذا كانت عناصر أحد الأسطر أو الأعمدة معدومة فإن:}$$

$$8 - |A| = 0 \quad \text{إذا كانت عناصر سطرين (أو عمودين) متناسبة فإن:}$$

وعندها تكون المصفوفة A شاذة .

1-5 : رتبة المصفوفة المربعة أو المستطيلة :

إن رتبة المصفوفة A حسب الأسطر هي أكبر عدد من الأسطر المستقلة خطياً فيها (باعتبارها أشعة)، وإن رتبة المصفوفة A حسب الأعمدة هي أكبر عدد من الأعمدة المستقلة خطياً فيها (باعتبارها أشعة) إن رتبة المصفوفة A حسب الأسطر = رتبة المصفوفة حسب الأعمدة. ويدخل مفهوم الرتبة في تعريف المصفوفات النظامية وفق التالي: تكون المصفوفة المربعة نظامية (unsingular) إذا كانت رتبته تساوي عدد أسطرها (أو عدد أعمدتها) .

- تعريف: إننا نقول عن المصفوفة المربعة A بأنها نظامية إذا كانت المعادلة $AX = 0$ ، تقتضي أن يكون $X = 0$.

وإذا لم تتجح المصفوفة A في أن تكون نظامية فإنها تسمى مصفوفة شاذة (singular) .
وهنا نلاحظ أن المعادلة $AX = 0$ يمكن كتابتها كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0 \quad (24 - 1)$$

حيث a_1 و a_2 و a_n هي الأشعة العمودية في A .

وهذا يعني أنه إذا كانت المعادلة (24-1) لا تتحقق إلا إذا كانت جميع $x_i = 0$ ، أي ان الأشعة a_i تكون مستقلة عن بعضها البعض وإن المصفوفة تكون من المرتبة n .

إذا كانت A مصفوفة مربعة نظامية من المرتبة $n \times n$ فإنه يوجد مصفوفة وحيدة B من المرتبة $n \times n$ أيضاً بحيث يكون لدينا:

$$A * B = B * A = I \quad (82 - 2)$$

حيث I من المرتبة $n \times n$ ، وعندها تسمى المصفوفة B بمقلوب المصفوفة A ونرمز لها بـ A^{-1} ونكتب ذلك كما يلي:

$$B = A^{-1} \quad (83 - 2)$$

• خواص رتبة المصفوفة (rank): وهي تختلف عن مرتبة المصفوفة (order)، وتعرف الرتبة بأنها تساوي أكبر عدد من الأعمدة (أو الأسطر) المستقلة في A .

وتكون رتبة المصفوفة من المرتبة $n \times n$ كاملة، إذا كانت رتبته $r = n$ ، وفي هذه الحالة يكون محدد المصفوفة $|A| \neq 0$ ، ويكون المقلوب A^{-1} موجوداً. أما بالنسبة للمصفوفات المستطيلة A من المرتبة $m \times n$ ، فإن رتبته تكون أقل أو تساوي أصغر العددين n أو m ، أي أن:

$$rank(A) \leq \min(n, m) \quad (24 - 1)$$

ومن خواص الرتبة إنها لا تتغير إذا تم ضرب المصفوفة A من اليسار أو اليمين بأية مصفوفة نظامية B أو بأي عدد حقيقي e . ومن أهم خواصها ما يلي:

$$\begin{aligned} 1 - rank(A) &= rank(A') = rank(A' * A) = rank(A * A') \\ 2 - rank(I) &= n \end{aligned} \quad (25 - 1)$$

$$3 - rank(A * B) \leq rank(B) \quad (A * B \text{ موجود})$$

$$4 - rank(A) = rank(A * B) = rank(B) \quad (B \text{ نظامية})$$

$$5 - rank(A) = rank(B) \quad \text{إذا كانت } A \text{ و } B \text{ متكافئتين فإن:}$$

إذا كانت $B_{n \times n}$ مربعة ونظامية و $C_{m \times n}$ مربعة ونظامية فإن :

$$6 - rank(B * A * C) = rank(A)$$

7- إذا كانت A مصفوفة قطرية فإن رتبته تساوي عدد العناصر القطرية غير المعدومة فيها

8- إذا كانت A نظامية من المرتبة $n \times n$ فإن رتبته تكون كاملة وتساوي n لأن $|A| \neq 0$ ولأن A^{-1} يكون موجوداً.

6-1 : أثر المصفوفة: (trace)

إن أثر المصفوفة المربعة A هو مجموع عناصرها القطرية (a_{ii}) ونرمز له بـ $tr(A)$ وهو يساوي:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^k a_{ii}$$

• خواص أثر المصفوفة: إذا كانت A و B من المرتبة $n \times n$ وكان e عدد حقيقي فإن:

$$\begin{aligned}
 1 - tr(e * A) &= e * tr(A) \\
 2 - tr(A \pm B) &= tr(A) \pm tr(B) \\
 3 - tr(A * B) &= tr(B * A) \quad : \quad (\text{الجداء معكوس}) \\
 4 - tr(B^{-1} * A * B) &= tr(A) \quad : \quad (B \text{ نظامية}) \quad (26 - 1) \\
 5 - tr(A * A') &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij}^2 \quad : \quad (\text{مجموع مربعات عناصر } A)
 \end{aligned}$$

7-1: القيم الذاتية والمصفوفات الشاذة (singular):

لنفترض أنه لدينا المعادلة النموذجية التالية :

$$A_{k \times k} * X_{k \times 1} = \lambda * X \quad : \quad X \neq 0 \quad (28 - 1)$$

لإيجاد حلول لهذه المعادلة نكتبها كما يلي:

$$[A - \lambda I]X = 0 \quad : \quad X \neq 0 \quad (29 - 1)$$

وحتى نتحقق هذه المعادلة (بفرض أن $X \neq 0$) فإنه يجب أن تكون المصفوفة $[AX - \lambda I]$ مصفوفة شاذة وأن يكون محددها مساوياً للصفر، أي يجب أن يكون لدينا :

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (30 - 1)$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة للمصفوفة A .

وبعد نشر هذا المحدد نحصل على معادلة مؤلفة من كثير حدود بالنسبة لـ λ ، نقوم بإيجاد جذورها الجبرية ونرتبها تنازلياً، فنحصل على ما يسمى بالجذور الكامنة للمصفوفة A أو ما يسمى بالقيم الذاتية لـ A ، ونكتبها كما يلي:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n \quad (31 - 1)$$

ثم نعوض هذه القيم الذاتية واحدة بعد الأخرى في المعادلة الأساسية (29-1) فنحصل على أن :

$$[A - \lambda I]X = 0 \quad (32 - 1)$$

نقوم بحلها فنحصل منها على الحلول الخاصة X ، المقابلة لتلك القيم الذاتية ونرمز لها بما يلي:

$$\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_n$$

ثم نقوم بمعيرتها فنحصل على الحلول الممعية (التي طول كل منها يساوي الواحد) التالية:

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$$

وعندها نجد أن كل من هذه الحلول يحقق المعادلة النموذجية الأولى (28-1)، لنأخذ أحد تلك الحلول

وليكن الحل ℓ_i ونعوضه في العلاقة (28-1) ثم نعالجه كما يلي:

$$A * \ell_i = \lambda_i * \ell_i \quad : \quad \text{ثم نأخذ } \ell_i' \text{ ونقسم على } \|\ell_i\|^2 \text{ فنحصل على أن:}$$

$$\ell_i' * A * \ell_i = \lambda_i * \ell_i' * \ell_i = \lambda_i * \|\ell_i\|^2 \quad (33 - 1)$$

$$\frac{\ell_i'}{\|\ell_i\|} * A * \frac{\ell_i}{\|\ell_i\|} = \lambda_i$$

أما بالنسبة للحلول الممعيمة e_i فنجد من المعادلة (28-1) أن:

$$\begin{aligned} A * e_i &= \lambda_i * e_i \\ e_i' * A * e_i &= \lambda_i * e_i' * e_i = \lambda_i * 1 = \lambda_i \end{aligned} \quad (34 - 1)$$

وبمقارنة العلاقتين (33-1) و (34-1) نجد أن:

$$e_i = \frac{\ell_i}{\|\ell_i\|}$$

8-1 : معكوس المصفوفة (شبه المقلوب Pseud Inverce) :

نعلم أن القيم الذاتية للمصفوفة A هي الجذور التربيعية للقيم الذاتية غير المعدومة للمصفوفة $A * A'$ أو للمصفوفة $A' * A$ ، ويمكننا أن نكتب أية مصفوفة A من المرتبة $m * n$ وفق الصيغة التالية :

$$A = U * \sigma * V' = \sum_{i=1}^r \sigma_i * u_i * v_i \quad (35 - 1)$$

حيث أن r هي رتبة المصفوفة A ، وبذلك يكون $r \leq (m, n)$ ، وإن U هي مصفوفة من المرتبة $m * r$ ، والتي أعمدها مؤلفة من الأشعة $u_1, u_2, \dots, u_r$ ، التي هي الأشعة الذاتية اليسرى، وإنها تحقق العلاقة $u' * u = I$ ، حيث I من المرتبة $r * r$ ، وأن V هي مصفوفة من المرتبة $n * r$ ، والتي أعمدها مؤلفة من الأشعة $v_1, v_2, \dots, v_r$ ، التي هي الأشعة الذاتية اليمينية، وإن V تحقق العلاقة $V' * V = I$ ، حيث I من المرتبة $r * r$ ، وأن σ هي المصفوفة القطرية المؤلفة من القيم الذاتية σ_i للمصفوفة A ، أي أن:

$$\sigma_{r*r} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$$

وبناءً على ذلك تم تعريف معكوس المصفوفة A (شبه المقلوب Pseud - Inverce) على شكل

مصفوفة من المرتبة المعكوسة $m * n$ ، ويُرمز لها بالرمز الخاص التالي $A^\dagger$ وهو يساوي :

$$A^\dagger = V * \sigma^{-1} * U' = \sum \frac{1}{\sigma_i} v_i * u_i' \quad (36 - 1)$$

وتستخدم هذه المصفوفة لإيجاد الحل المثالي X الذي يجعل مربع الخطأ التالي: $\|AX - B\|^2$ أصغر ما يمكن . وإن هذا الحل يساوي :

$$X = A^\dagger * B \quad (37 - 1)$$

وإذا كانت رتبة A أقل من n ، فليس لهذه المسألة حل وحيد بالنسبة لـ X ، وإن تحليل القيمة الذاتية سيعطينا الحل بأصغر قيمة ممكنة للخطأ المذكور.

إن معكوس المصفوفة A يتمتع بالخواص التالية:

$$\begin{aligned} 1 - A * A^\dagger * A &= A \\ 2 - A^\dagger * A * A^\dagger &= A^\dagger \\ 3 - (A * A^\dagger)' &= A * A^\dagger \\ 4 - (A^\dagger * A)' &= A^\dagger * A \end{aligned} \quad (38 - 1)$$

9-1 : قواعد اشتقاق المصفوفات :

تعتمد عمليات اشتقاق المصفوفات على القواعد التالية :

• قواعد الاشتقاق بالنسبة للمتحول t :

$$1 - \frac{dA(t)}{dt} = \left[\frac{da_{ij}(t)}{dt} \right] \quad (39 - 1)$$

$$2 - \frac{d}{dt}(A \pm B) = \frac{dA}{dt} \pm \frac{dB}{dt} \quad (40 - 1)$$

$$3 - \frac{d}{dt}(\propto * A) = \propto \frac{dA}{dt} \quad (41 - 1)$$

$$4 - \frac{d(A * B)}{dt} = \frac{dA}{dt} * B + A * \frac{dB}{dt} \quad (42 - 1)$$

• قواعد الاشتقاق بالنسبة للمصفوفة ذاتها فهي:

$$5 - \frac{\partial}{\partial X}(C' * X) = C \quad (43 - 1)$$

$$6 - \frac{\partial(X'X)}{\partial X} = 2X$$

وإذا كانت A متناظرة فإن:

$$7 - \frac{\partial}{\partial X}(X' * A * X) = 2AX \quad (44 - 1)$$

$$8 - \frac{\partial|A|}{\partial A} = (\text{adjoint of } A) = |A| * (A^{-1})' \quad (45 - 1)$$

وذلك بشرط وجود A^{-1} :

$$9 - \frac{\partial}{\partial A}[\text{tr}|A'MA|] = MA + M'A \quad (46 - 1)$$

10-1 : الصيغة التربيعية والمسافات :

الصيغة التربيعية :

إذا كانت A مربعة ومتناظرة وكان $X'(x_1 x_2 \dots x_n)$ شعاع من مرتبة A ، فإننا نقول عن الجداء $X' * A * X$ بأنه الصيغة التربيعية لـ X ونرمز له بـ :

$$Q(X) = X'_{1n} * A_{nn} * X_{n1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} * x_i * x_j = \text{عدد} \quad (47 - 1)$$

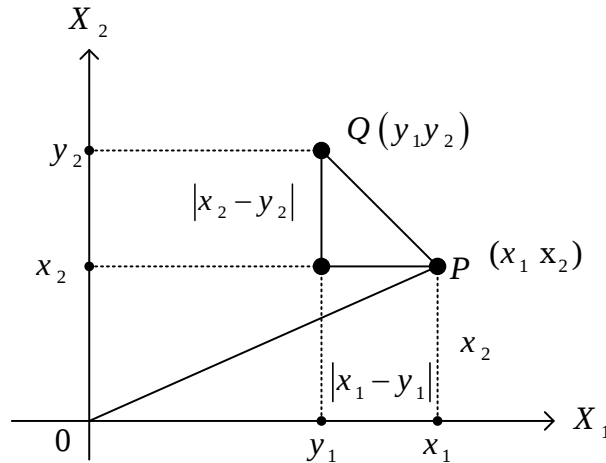
وكمثال على ذلك نأخذ المثال البسيط التالي :

$$\begin{aligned} Q(X) &= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \\ Q(X) &= a_{11}^2 x_1^2 + a_{22}^2 x_2^2 + 2a_{12}^2 x_1 x_2 \end{aligned} \quad (48 - 1)$$

وهي تعبر عن مربع المسافة الممعية من النقطة $X(x_1 x_2)$ حتى مركز الإحداثيات 0.

وبعد تعريف الصيغة التربيعية نستعرض تعريف المسافة بين نقطتين في المستوى أو في الفضاء R^P ، وذلك من خلال إحداثيات الشعاع الواصل بينهما .

لنفترض أنه لدينا نقطة $P(x_1, x_2)$ في المستوى X_1, X_2 كما في الشكل (2-1) التالي :



الشكل (2-1): المسافات

فإن المسافة $d(P, 0)$ من النقطة $P(x_1, x_2)$ حتى مركز الإحداثيات $O(0, 0)$ تساوي حسب نظرية فيثاغورث ما يلي:

$$d(P, 0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (49 - 1)$$

ولكن المسافة $d(P, Q)$ من النقطة $P(x_1, x_2)$ إلى النقطة $Q(y_1, y_2)$ تساوي :

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (50 - 1)$$

وتسمى هذه المسافات بالمسافات الإقليدية (Euclidean)، لأنها تفترض أن X_1 و X_2 لهما نفس وحدة القياس (متر أو غيره)، وبالتالي فإن المسافة $d(P, Q)$ تحسب بنفس تلك الوحدة القياسية (متر)، أما إذا كانت وحدة قياس X_1 (متر) تختلف عن واحد قياس X_2 (كغ)، فإن المقدار الذي تحت الجذر يصبح غير قابل للجمع . وبالتالي تصبح المسافة غير معرفة .

وللتخلص من هذه المشكلة نقوم بمعييرة المتحولين X_1 و X_2 وتحويلها إلى متحولين ممعيرين، وذلك بتقسيم كل منها على انحرافه المعياري $\sqrt{S_{11}}$ و $\sqrt{S_{22}}$ ، فنحصل على متحولين جديدين مجردين من

$$Z_1 = \frac{X_1}{\sqrt{S_{11}}} \quad Z_2 = \frac{X_2}{\sqrt{S_{22}}} : \text{لهما ب :}$$

وبناء على ذلك نقوم بوضع تعريف جديد للمسافة من النقطة $P(Z_1, Z_2)$ حتى المركز O بالعلاقة التالية:

$$d^*(P, 0) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = \sqrt{\frac{X_1^2}{S_{11}} + \frac{X_2^2}{S_{22}}} \quad (51 - 1)$$

وتسمى هذه المسافة $d^*(P, 0)$ بالمسافة الإحصائية من P حتى المركز O .

وبناء على ذلك يمكننا تعريف المسافة الإحصائية بين أي نقطتين $P(x_1, x_2)$ و $Q(y_1, y_2)$ في المستوى وحسابها من العلاقة :

$$d^*(P, Q) = \sqrt{\frac{(x_1 - y_1)^2}{S_{11}} + \frac{(x_2 - y_2)^2}{S_{22}}} \quad (52 - 1)$$

وتسمى هذه المسافة بالمسافة الإحصائية من النقطة P حتى النقطة Q ، وبصورة عامة يمكننا تعريف المسافة الإحصائية في الفضاء R^p بين أي نقطتين $P(x_1, x_2, \dots, x_p)$ و $Q(y_1, y_2, \dots, y_p)$ بالعلاقة :

$$d^*(P, Q) = \sqrt{\frac{(x_1 - y_1)^2}{S_{11}} + \frac{(x_2 - y_2)^2}{S_{22}} + \dots + \frac{(x_p - y_p)^2}{S_{pp}}} \quad (53 - 1)$$

حيث أن $S_{11}, S_{22}, S_{33}, \dots, S_{pp}$ هي تباينات المتحولات الإحداثية $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_p)$ على الترتيب وهنا نلاحظ ما يلي :

1- إذا وضعنا الإحداثيات $y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_p = 0$ في المعادلة (53-1) فإننا نحصل على المسافة من النقطة P حتى المركز (O) في الفضاء R^p ونحصل على المعادلة:

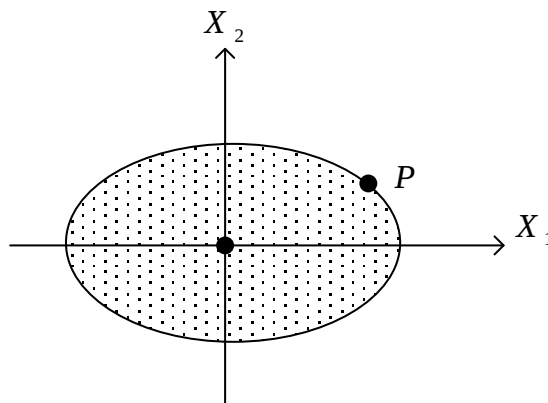
$$d^*(P, 0) = \sqrt{\frac{x_1^2}{S_{11}} + \frac{x_2^2}{S_{22}} + \dots + \frac{x_p^2}{S_{pp}}} \quad (53a - 1)$$

2- إذا كانت التباينات متساوية وتساوي الواحد: $S_{11} = S_{22} = \dots = S_{pp} = 1$ فإننا نحصل على المسافة (الإقليدية) المعرفة في (50-1) .

3- إذا وضعنا المسافة $d^*(P, Q)$ مساوية لعدد ثابت C في (52-1)، وربعنا الطرفين فإننا سنحصل على المعادلة التالية (في حالة متحولين):

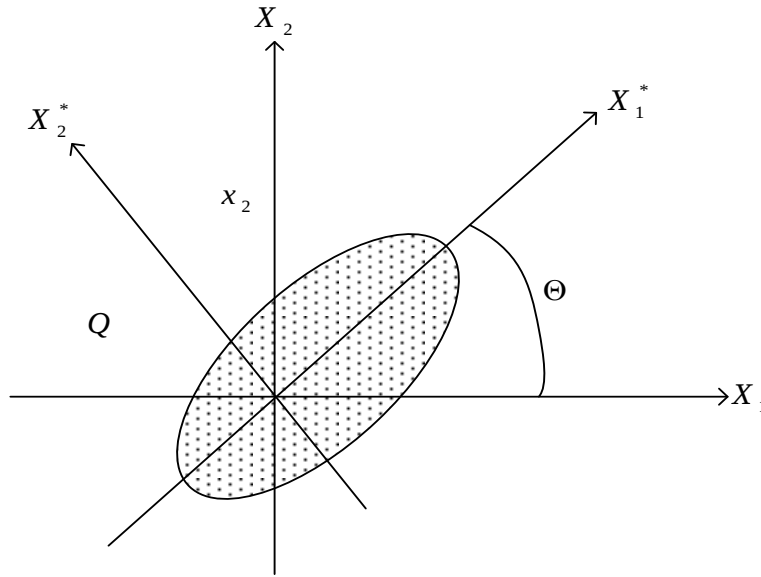
$$\frac{x_1^2}{S_{11}} + \frac{x_2^2}{S_{22}} = C^2 \quad (54 - 1)$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه المبدأ (O) ومحوراه يوازيان المحورين الإحداثيين OX_1 و OX_2 ، كما هو موضح على الشكل التالي:



الشكل (1-3) شكل القطع الناقص

وإذا كانت قياسات X_1 مرتبطة مع قياسات X_2 فإن شكل الانتشار لهما يكون له الشكل التالي:



الشكل (4-1) قطع ناقص

وعندها فإن المسافة من النقطة P حتى المركز (O) تعطى بالعلاقة (1-53a)، وإذا وضعنا تلك المسافة مساوية لعدد ثابت C فإننا نحصل على قطع ناقص كالقطع المبين على الشكل (4-1)، وحتى نحصل على قطع ناقص مشابه لشكل الانتشار (1-3)، فإننا نقوم بتدوير المحاور الإحداثية OX_1 و OX_2 إلى اليسار بزاوية قدرها (θ) ، فنحصل على محاور جديدة نرسم لها ب OX_1^* و OX_2^* ، ولإيجاد الإحداثيات الجديدة بدلالة الإحداثيات القديمة نستخدم معادلتى التحويل التاليتين :

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ x_2^* &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (55-1)$$

ومنهما نحسب تبايني X_1^* و X_2^* الجديدين ونرمز لهما ب S_{11}^* و S_{22}^* ، وعندها نجد أن المسافة من نفس النقطة $P(x_1^*, x_2^*)$ ذات الإحداثيات الجديدة إلى المركز (O) تعطى بالعلاقة (1-53a) التي تأخذ الشكل التالي :

$$d^*(P, O) = \sqrt{\frac{x_1^{*2}}{S_{11}^*} + \frac{x_2^{*2}}{S_{22}^*}} \quad (56-1)$$

وإذا قمنا بتعويض (x_1^*, x_2^*) وكذلك S_{11}^* و S_{22}^* من (55-1) في (56-1)، فإننا سنحصل على المسافة الجديدة $d^{**}(P, O)$ بدلالة الإحداثيات القديمة x_1, x_2 ، وبعد إجراء الإصلاحات المطولة نحصل على المسافة الجديدة x_1^*, x_2^* بدلالة الإحداثيات القديمة من العلاقة التالية :

$$d^{**}(P, O) = \sqrt{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2} \quad (57-1)$$

أن المقدار الذي تحت الجذر يأخذ صيغة تسمى بالصيغة التربيعية، لأنه يتضمن حدود لـ X من الدرجة الثانية هي $(x_1^2), (x_2^2)$ و $(x_1 * x_2)$ مضروبة بالأعداد a_{11}, a_{22} و $2a_{12}$ على الترتيب .

حيث أن a_{ij} هي الأعداد المناسبة التي تجعل المسافة $d^{**}(P, O)$ غير سالبة لجميع قيم x_2, x_1 ، وهي تحدد وتحسب من العلاقات التالية :

$$a_{11} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta * S_{11} + 2 \sin \theta \cos \theta * S_{12} + \sin^2 \theta * S_{22}} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta * S_{22} - 2 \sin \theta \cos \theta * S_{12} + \sin^2 \theta * S_{11}}$$

$$a_{22} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta * S_{11} + 2 \sin \theta \cos \theta * S_{12} + \sin^2 \theta * S_{22}} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta * S_{22} - 2 \sin \theta \cos \theta * S_{12} + \sin^2 \theta * S_{11}}$$

$$a_{12} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta * S_{11} + 2 \sin \theta \cos \theta * S_{12} + \sin^2 \theta * S_{22}} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta * S_{22} - 2 \sin \theta \cos \theta * S_{12} + \sin^2 \theta * S_{11}}$$

وإذا ربنا طرفي العلاقة (57-1) نحصل على مربع المسافة $d^{**}(P, O)$ ويكون لدينا :

$$d^{**2}(P, O) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \quad (58 - 1)$$

وهنا نلاحظ أنه يمكن كتابة (58-1) على شكل مصفوفة كما يلي:

$$d^{**2}(P, O) = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (59 - 1)$$

$$d^{**2}(P, O) = X' * A * X \quad : \text{وهي الصيغة التربيعية المطلوبة} \quad (60 - 1)$$

وإذا وضعنا تلك المسافة مساوية لعدد ثابت C فإن المعادلة (56-1) تعطينا أن :

$$\frac{x_1^{*2}}{S_{11}^*} + \frac{x_2^{*2}}{S_{22}^*} = C^2$$

وهي معادلة قطع ناقص بدلالة الإحداثيات الجديدة x_1^* و x_2^* ، ومحوراه يوازيان المحورين OX_1^* و OX_2^* ، اللذين يصنعان مع المحورين القديمين OX_1 و OX_2 زاوية قدرها θ ، وإن هذا القطع يأخذ نفس وضعية القطع في الشكل (4-1) بالنسبة للمحورين OX_1^* و OX_2^* .

ولكن إذا جعلنا تلك المسافة مساوية لعدد ثابت C في المعادلة (58-1) فإننا نحصل على أن:

$$d^{**2}(P, O) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = C^2 \quad (61 - 1)$$

وهي معادلة القطع المذكور بدلالة الإحداثيات القديمة OX_1 و OX_2 ، كما هو مبين على الشكل (4-1) السابق.

وبصورة عامة فإنه يمكننا تعريف المسافة من نقطة P إلى مركز الإحداثيات (O) في الفضاء R^P بواسطة العلاقة التالية:

$$d^{**}(P, O) = \sqrt{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \dots + a_{pp}x_p^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{p-1}x_{p-1}x_p} \quad (62 - 1)$$

وبترتيب الطرفين يمكن كتابة هذه العلاقة مصفوفياً كما يلي:

$$d^{**2}(P, O) = (x_1 x_2 x_3 \dots x_P) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1P} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2P} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{P1} & a_{P2} & \dots & a_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_P \end{bmatrix} = X' * A * X$$

ولحساب المسافة بين نقطتين $P(x_1 x_2 x_3 \dots x_P)$ و $Q(y_1 y_2 y_3 \dots y_P)$ في الفضاء R^P نعمم العلاقة (62-1) فنجد أن:

$$d(P, O) = \sqrt{a_{11}(x_1 - y_1)^2 + a_{22}(x_2 - y_2)^2 + \dots + a_{PP}(x_P - y_P)^2 + 2a_{12}(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + 2a_{13}(x_1 - y_1)(x_3 - y_3) + \dots + 2a_{P-1P}(x_{P-1} - y_{P-1})(x_P - y_P)} \quad (63 - 1)$$

وإذا وضعنا هذه المسافة مساوية لعدد ثابت C ، ثم ربعنا الطرفين فإننا سنحصل على معادلة قطع ناقص كما يلي:

$$d^{**2}(P, Q) = a_{11}(x_1 - y_1)^2 + a_{22}(x_2 - y_2)^2 + \dots + a_{PP}(x_P - y_P)^2 + 2a_{12}(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + 2a_{13}(x_1 - y_1)(x_3 - y_3) + \dots + 2a_{P-1P}(x_{P-1} - y_{P-1})(x_P - y_P) = C^2 \quad (64 - 1)$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه O ومحوراه يوازيان المحورين الجديدين X_1^* و X_2^* ، اللذين يصنعان مع المحورين القديمين OX_1 و OX_2 الزاوية θ .

وأخيراً يمكننا كتابة مربع المسافة من P حتى Q مصفوفياً كما يلي:

$$d^{**2}(P, Q) = [(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \dots (x_P - y_P)] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1P} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2P} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3P} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{P1} & a_{P2} & \dots & a_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - y_1) \\ (x_2 - y_2) \\ (x_3 - y_3) \\ \vdots \\ (x_P - y_P) \end{bmatrix} \quad (65 - 1)$$

كما يمكن كتابتها على شكل الصيغة التربيعية المعممة كما يلي:

$$d^{**2}(P, Q) = (X - Y)' * A * (X - Y) \quad (66 - 1)$$

الفصل الثاني

قضايا القيم الذاتية والمصفوفات الشاذة

1-2 تمهيد :

لقد ظهرت مشكلة القيم الذاتية للمصفوفات عند معالجة المعادلات الخطية المتجانسة. ولكي نوضح جوهر هذه القضية دعنا ننتقل من المعادلة الخطية التالية:

$$a * x = \lambda * x \quad (1 - 2)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$(a - \lambda) * x = 0 \quad (2 - 2)$$

ومن الواضح أن الحل البسيط لهذه المعادلة بالنسبة لـ x هو الحل الذي يكون فيه $x = 0$. ويسمى هذا الحل بالحل التافه (Trivial solution). لأنه لا يفيدنا في معالجة المسائل العلمية المختلفة. ويجعلنا نخسر جميع المعلومات المتوفرة في العلاقة (1-2) أو في العلاقة (2-2).

وحتى نمنع هذا الحل التافه ($x = 0$) من الحدوث نستبعد من الحلول الممكنة، ونفترض أو نشترط أن يكون المضروب الأول ($a - \lambda$) معدوماً، وعندها نجد أن λ يجب أن تأخذ قيمة معينة هي a لأن:

$$(a - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = a \quad (3 - 2)$$

وتسمى هذه القيمة لـ λ بالقيمة الذاتية (الكامنة) للمعادلة (2-2) (eigenvalue). وعند تعويض هذه القيمة في المعادلة (2-2) فإنها تعطينا لانهاية من الحلول المقبولة (المحدودة وغير المعدومة) بالنسبة للمتحوّل المجهول x . وذلك لأن جداء أية قيمة محدودة لـ x في ($a - \lambda$) يساوي الصفر عندما ($\lambda = a$).

وكذلك الأمر في حالة المصفوفات المربعة، حيث نجد أنه لو كانت لدينا جملة من المعادلات الخطية كما يلي:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \lambda x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned} \quad (4 - 2)$$

فإنه يمكننا كتابتها بدلالة المصفوفات والأشعة كمايلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (5 - 2)$$

والتي يمكن كتابتها باختصار على الشكل التالي:

$$A_{3.3} * X_{3.1} = \lambda * X_{3.1} \quad (6 - 2)$$

وهذه العلاقة تعبر عن عملية تحويل الشعاع X إلى شعاع آخر هو λX . وهذه العملية تصادفنا كثيراً في الدراسات والبحوث العلمية.

وبصورة عامة إذا كان لدينا n معادلة خطية وتتضمن n متحولاً، ومشابهة للمعادلات (2-4) فإنه يمكننا كتابتها بدلالة مصفوفة A وشعاع X كما يلي:

$$A_{n,n}X_{n,1} = \lambda X_{n,1} \quad (7-2)$$

حيث أن: A هي مصفوفة مربعة من المرتبة $n.n$ (وتسمى بمصفوفة التحويل)، وتتضمن الأمثال العددية a_{ij} المصاحبة للمتحويل X_j في المعادلة الخطية i ، وإن $X_{n,1}$ هو الشعاع العمود المؤلف من المتحولات X_j ، أي أن $X_{n,1}$ هو الشعاع العمود الذي يرمز للمتحويلات X_j نفسها، أما λ فهو عدد حقيقي (سلمي) يستخدم في عملية التحويل من X إلى λX ، ويسمى شكل المعادلة (2-7) بالشكل النموذجي أو المعياري لمشكلة القيم الذاتية للمصفوفة A . (standard eigenvalue problem) وذلك لتمييزها عن الشكل العام لمشكلة لقيم الذاتية للمصفوفة A (Generalized eigenvalue problem) والذي يكون على الشكل التالي:

$$A_{n,n}X_{n,1} = \lambda B_{n,n}X_{n,1} \quad (8-2)$$

حيث أن B هي مصفوفة مربعة من المرتبة $n.n$ أيضاً ومحددة إيجابياً (positive definite) وأن A مصفوفة متناظرة، ويمكن تحويل المشكلة العامة للقيم الذاتية المبينة في (2-8) إلى المشكلة النموذجية المعروضة في العلاقة (2-7)، وذلك باستخدام تحويل وتحليل تشوليسكي (cholesky) [انظر ذلك في الطويل- المصفوفات- ص 138]. لذلك فإننا سنركز اهتمامنا في هذه الورقة على المشكلة النموذجية للقيم الذاتية وسنعرضها من خلال الفقرة التالية.

2-2 المشكلة النموذجية للقيم الذاتية:

إن الشكل النموذجي لهذه المشكلة يكون على شكل المعادلة (2-7) السابقة وهي:

$$A * X = \lambda * X \quad (9-2)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$[A - \lambda I] * X = 0 \quad (10-2)$$

حيث أن: I هي مصفوفة أحادية من المرتبة n .

إن حل المعادلة (2-10) بالنسبة للشعاع X يصطدم بالحل التافه (الذي هو $X = 0$).

وحتى نمنع حدوث ذلك الحل التافه. فإننا نفترض أو نشترط أن تكون المصفوفة اليسارية $[A - \lambda I]$ شاذة. وهذا يعني أنه يجب أن يكون محددتها معدوماً. أي نشترط أن يحقق محددتها الشرط التالي.

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (11-2)$$

وبما أن هذا المحدد هو من المرتبة $n.n$ وإن عناصر قطره الرئيسي تساوي $(a_{ii} - \lambda)$ فإن العلاقة (2-11) تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (12 - 2)$$

وعندما نقوم بحساب منشور أو مفكوك هذا المحدد، فإننا سنحصل منه على كثير حدود من المرتبة n بالنسبة للوسيط المجهول λ ويكون له الشكل التالي:

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \dots + a_n\lambda^n = 0 \quad (13 - 2)$$

وتسمى المعادلة (13-2) بالمعادلة المميزة للمصفوفة A (Characteristics equation)، وعندما نقوم بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ λ فإننا سنحصل على n جذراً لها: أي إننا سنحصل منها على n قيمة لـ λ وسنرمز لها بالرموز :

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \quad (14 - 2)$$

وتسمى هذه الجذور بالقيم الذاتية أو القيم المميزة للمصفوفة A ، كما تسمى بالجذور الكامنة للمصفوفة A ، وإن هذه الجذور هي قيم λ ، التي تحول المصفوفة A إلى المصفوفة الشاذة $[A - \lambda I]$ ، وهي تستخدم كثيراً في المسائل العلمية. وإن هذه القيم الذاتية قد لا تكون مختلفة عن بعضها البعض بل قد يكون بعضها مكرراً عدة مرات (عدة جذور مضاعفة). كما يمكنها أن تكون حقيقية أو عقدية (مركبة). ولكن إذا ظهرت جذور عقدية فإنها تكون على شكل أزواج مترافقة .

وهنا نشير إلى أنه إذا كانت المصفوفة A نظامية ($|A| \neq 0$) فإن عدد قيمها الذاتية يساوي مرتبتها n . وإذا كانت A شاذة، فإن عدد القيم الذاتية لها يكون مساوياً لمرتبتها r ، حيث أن $r \leq n$.

والآن نعود إلى مسألة إيجاد الشعاع X الذي يحقق العلاقة (10-2) مقابل كل قيمة من القيم الذاتية λ_i . ولذلك نأخذ إحدى القيم الذاتية ولتكن $\lambda = \lambda_i$ ونعوضها في المعادلة (10-2) فإننا سنحصل على المعادلة المحددة التالية:

$$[A - \lambda_i I] * X = 0 \quad (15 - 2)$$

وبما أن قيمة λ_i تجعل المصفوفة $[A - \lambda_i I]$ مصفوفة شاذة، فإنه يمكننا الحصول من (15-2) على عدد لانهائي من الحلول المقبولة لـ X . وإذا أخذنا أحد تلك الحلول وليكن X_i المقابل للقيمة الذاتية λ_i فإنه سيكون على شكل شعاع عمود كما يلي:

$$X_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_i \quad (16 - 2)$$

ويسمى هذا الشعاع X_i بالشعاع الذاتي (المميز) للمصفوفة A والمقابلة للقيمة الذاتية λ_i ولكن بما أن جملة المعادلات (10-2) هي جملة معادلات خطية متجانسة، فإن أي حل مقبول لها مثل X_i ، يشكل مع مضاعفاته حزمة من الحلول المقبولة (غير التافهة) ونرمز لها بالرموز:

$$X_i, C_1 X_i, C_2 X_i, C_3 X_i, \dots \quad (17 - 2)$$

حيث C_k أي عدد حقيقي (غير الصفر) يضاعف أو يقلص الحل X_i .

وبذلك نحصل على لانهاية أخرى من الحلول المرتبطة بالحل X_i المقابلة للقيمة الذاتية λ_i وحدها، ولكن هذه الحلول المتضاعفة تحدد لنا فقط الاتجاه العام لشعاع الحل X_i ، ولا تحدد لنا عناصر الحل المطلوب (مركبات X_i). ولذلك تبقى أطوال هذه الحلول كيفية (غير محددة). وهذا أمر لا يساعدنا على التوصل إلى حلول محددة الطول بل محددة الاتجاه فقط.

وللتخلص من هذه المشكلة يمكن أن نقوم بتحويل هذه الأشعة المتضاعفة إلى أشعة مميرة واحدة بحيث يكون طول كل منها مساوياً للواحد الصحيح.

لذلك نأخذ أي شعاع منها مثل X_i ونحسب مربع طوله ℓ_i كما يلي:

$$\|X_i\|^2 = X_i' * X_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots = \ell_i^2 = \text{مربع الطول} \quad (18 - 2)$$

$$\|X_i\| = \sqrt{\ell_i^2} = +\ell_i \quad \text{ثم نحسب طوله } \ell_i \text{ فنجد أن :}$$

ثم نقسم عناصر ذلك الشعاع على طوله $(+\ell_i)$ فنحصل على الشعاع الواحدى للشعاع X_i ونرمز له بـ e_i وهو يساوي

$$e_i = \frac{X_i}{\|X_i\|} = \frac{X_i}{\ell_i} \quad (19 - 2)$$

وبالتالي نحصل على شعاع جديد يكون له نفس الاتجاه ويكون طوله الجديد مساوياً للواحد لأن: $e_i' * e_i = 1$ ، ويسمى الشعاع e_i بالشعاع الذاتي الممير المقابل للقيمة الذاتية λ_i ، ونحصل على نفس النتيجة إذا حولنا الأشعة الأخرى في (2-17) إلى أشعة واحدة. وإذا كان للمصفوفة n قيمة ذاتية مختلفة (جذراً مختلفاً) فإنه سيكون لها n شعاعاً ذاتياً واحدياً مختلفاً مقابلاً لها. وللحصول على هذه الأشعة نعود ونعوض كل من القيم الذاتية التي حصلنا عليها في (2-14) في المعادلة (2-10)، واحدة تلو الأخرى حتى نحصل على جميع الأشعة الذاتية الواحدة المقابل لكل منها.

$$\text{مثال (2-1): أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل: نكتب المعادلة الذاتية لـ A كما يلي:

$$AX = \lambda X \Rightarrow [A - \lambda I] * X = 0$$

ثم نضع محدد المصفوفة اليسرى مساوياً للصفر فنحصل على أن :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ثم نقوم بحساب مفكوكه فنحصل على كثير حدود من المرتبة الثانية بالنسبة لـ λ وهو:

$$(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 3 * 3 = 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

وبحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ λ نحصل على الجذرين التاليين:

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -2$$

ولإيجاد الأشعة الذاتية المقابلة لهما، نأخذ كل قيمة على حدة، فنجد أنه عندما نأخذ $\lambda_1 = 4$ فإن مصفوفة المعادلة المميزة تساوي :

$$[A - \lambda_1 I] = \begin{bmatrix} 1-4 & 3 \\ 3 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

وللحصول على الأشعة الذاتية المقابلة لهذه القيمة نكتب المعادلة المميزة كما يلي :

$$[A - \lambda_1 I] * X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

ومن هنا نحصل على المعادلتين غير المستقلتين التاليتين:

$$-3x_1 + 3x_2 = 0$$

$$3x_1 - 3x_2 = 0$$

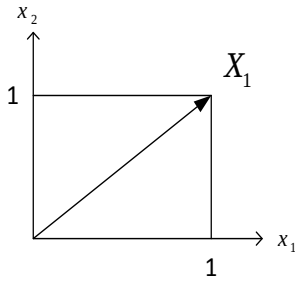
وهما عبارة عن معادلة واحدة (الثانية تنتج من الأولى بضربها ب (-1))

$$-3x_1 + 3x_2 = 0 \quad \text{نأخذ أحدهما ولتكن الأولى:}$$

$$x_1 = x_2 \quad \text{فنحصل منها على أن:}$$

أي أن العنصر x_1 يساوي x_2 وله نفس الإشارة

وبإعطاء x_1 أية قيمة كيفية . يمكننا أن نحصل من المعادلة الأخيرة على لانهاية من الحلول المقبولة ويكون لها نفس الاتجاه .



وحتى نحدد أحد الحلول الخاصة نضع كفيلاً $x_1 = 1$

$$x_2 = 1 \quad \text{فنحصل على أن:}$$

وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي الأول، والذي نرمز له بـ X_1 والمبين على

الشكل المقابل وهو $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ وهو يقابل القيمة الذاتية $\lambda_1 = 4$.

ومن هنا نحصل على حزمة الأشعة الذاتية الأخرى المقابلة لنفس القيمة الذاتية $\lambda_1 = 4$ ، وذلك بأخذ مضاعفات X_1 كما يلي:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_{c_1} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_{c_2} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots$$

حيث c_i أي عدد حقيقي (غير الصفر)

أما عندما نأخذ القيمة الذاتية الثانية $\lambda_2 = -2$ فإننا نجد أن المصفوفة:

$$[A - \lambda_2 I] = \begin{bmatrix} 1+2 & 3 \\ 3 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

ثم نكتب المعادلة الذاتية كما يلي:

$$[A - \lambda_2 I]X = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

ومن هنا نحصل على المعادلتين غير المستقلتين التاليتين:

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

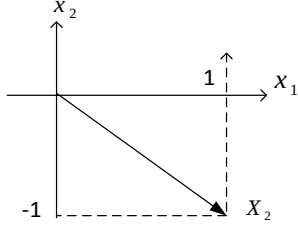
$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

وهما عبارة عن معادلة واحدة، وإذا أخذنا أحدهما نجد أن:

$$x_1 = -x_2$$

أي أن العنصر x_1 يساوي $(-x_2)$ وأن العنصران مختلفين بالإشارة .

وبإعطاء x_1 أية قيمة كيفية، فإنه يمكننا أن نحصل من المعادلة الأخيرة على لانهاية من الحلول المقبولة كمايلي:



نضع بشكل كفي $x_1 = 1$ فنحصل على أن $x_2 = -1$ ، وبذلك نحصل على الشعاع الذاتي الخاص X_2 المقابل للقيمة الذاتية الثانية $\lambda_2 = -2$ وهو

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على حزمة الأشعة الذاتية الأخرى المقابلة لنفس القيمة الذاتية $\lambda_2 = -2$ وهي:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, X_{c_1} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, X_c = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \dots \dots \dots$$

حيث c أي عدد حقيقي (غير الصفر)

وللتحقق من أن هذه الأشعة تشكل حلول مقبولة للمعادلة (9-2) أو للمعادلة (10-2) نقوم بتعويضها في المعادلة الذاتية $AX = \lambda X$ لنؤكد من تحققها فنجد أن :

$$AX_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 X_1$$

$$AX_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_2 X_2$$

أي أن الشعاعين الذاتين X_2, X_1 يحققان المعادلة الذاتية، وبذلك يشكلان حلين مقبولين لها. علماً بأن مضاعفات كل منهما تشكل حلول مقبولة لها أيضاً، ونشير هنا أيضاً إلى أن الحلين X_2 و X_1 متعامدان لأنهما يحققان شرط التعامد وهو أن يكون الجداء السلمي لهما مساوياً للصفر:

$$\langle X_1, X_2 \rangle = X_1^* * X_2 = (1, 1) \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

ولكن هذين الحلين محددان بالاتجاه فقط ، وغير محددتين بالطول لأن جميع مضاعفاتهما تشكل حلول مقبولة أيضاً .

لذلك يفضل أن نقوم بحساب الأشعة الذاتية المميرة الواحدة لهما، ولهذا نقوم بحساب طول كل منها فنجد أن:

$$\ell_1^2 = \|X_1\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \ell_1 = \sqrt{2}$$

$$\ell_2^2 = \|X_2\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \ell_2 = \sqrt{2}$$

وبذلك نجد أن الأشعة الذاتية الواحدة هي:

$$e_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \frac{X_1}{\ell_1} = \frac{X_1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \frac{X_2}{\ell_2} = \frac{X_2}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ويمكننا التأكد من أن هذين الشعاعين يحققان المعادلة النموذجية (9-2) أو (10-2) فنجد أن:

$$A * e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \lambda_1 e_1$$

$$A * e_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \lambda_2 e_2$$

أي أن الشعاعين e_2, e_1 يحققان المعادلة الذاتية المفروضة ويشكلان الحلين المعييين لها .

3-2 نظريات مختلفة حول القيم والأشعة الذاتية :

لقد أشرنا سابقاً إلى أنه إذا كانت المصفوفة A نظامية ومن المرتبة $n * n$ ، فإنه عدد قيمها الذاتية سيكون مساوياً لـ n قيمة ذاتية. ونرمز لها $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n$ ، وبناء على ذلك نقدم النظريات التالية (للبرهان أنظر المصفوفات للطويل):

ن1: إن مجموع القيم الذاتية للمصفوفة A يساوي أثر $trace$ تلك المصفوفة أي أن:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_i = tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (20 - 2)$$

ن2: إن قيمة محدد المصفوفة A يساوي جداء قيمها الذاتية أي أن:

$$|A| = \prod_{k=1}^n \lambda_i \quad (21 - 2)$$

وكتطبيق على ذلك نأخذ القيم الذاتية للمصفوفة A في المثال (1-2) السابق فنجد أن:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \lambda_i = 4 + (-2) = 2 \\ tr(A) = 1 + 1 = 2 \end{array} \right| \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_i = tr(A)$$

$$\left. \begin{array}{l} |A| = 1 - 9 = -8 \\ \prod_{k=1}^n \lambda_i = 4(-2) = -8 \end{array} \right| \Rightarrow |A| = \prod_{k=1}^n \lambda_i$$

ن3: إذا كانت المصفوفة A مصفوفة صفرية فإن جميع قيمها الذاتية تكون أصفاراً أي أن:

$$A = [0] \Rightarrow \lambda_i = 0: \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (22 - 2)$$

ن4: إذا كانت المصفوفة A هي المصفوفة الأحادية I فإن جميع قيمها الذاتية تكون متساوية وتساوي الواحد الصحيح أي أن:

$$A = I \Rightarrow \lambda_i = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (23 - 2)$$

ن5: إذا كانت المصفوفة A مصفوفة قطرية D فإن قيمها الذاتية تساوي عناصرها القطرية. أي أن:

$$A = D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_i = a_{ii} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (24 - 2)$$

ويستفاد من هذه النظرية في إيجاد القيم الذاتية λ_i لأي مصفوفة وذلك بتحويلها إلى مصفوفة قطرية.

ن6: تكون أي مصفوفة A مصفوفة شاذة ($|A| = 0$) إذا وفقط إذا كانت إحدى قيمها الذاتية مساوية للصفر (لأن قيمة $|A| = \prod \lambda_i$).

أما إذا كانت المصفوفة قطرية D فإنها تكون شاذة إذا وفقط إذا كان أحد عناصرها القطرية معدوماً .

ن7: إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A مختلفة، أي إذا كانت: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ ، فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون مختلفة (من حيث الاتجاه) .

ن8: إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون مستقلة خطياً (متعامدة) .

ن9: يمكن أن يكون لمصفوفتين مختلفتين A , B ولهما نفس المرتبة $n.n$ نفس القيم الذاتية: وعندها تكون المصفوفتان A و B متشابهتين. (يستفاد منها في التعرف على المصفوفات المتشابهة) .

ن10: إن للمصفوفة A ولمنقولها A' نفس القيم الذاتية وذلك لأن لهما نفس كثير الحدود بالنسبة لـ λ .

ن11: إذا كانت المصفوفة A حقيقية ومتناظرة فإن قيمها الذاتية تكون حقيقية. وإذا كانت هذه القيم مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون متعامدة، أي يكون الجداء السلمي لأي شعاعين مساوياً الصفر $\langle U_k * U_n \rangle = U'_k * U_n = 0$ ، أما إذا لم تكن مختلفة فيمكن تحويل الأشعة الذاتية المقابلة لها إلى أشعة متعامدة (حسب نظرية غرام) .

ن12: إذا كانت المصفوفة A حقيقية ومتناظرة سلبياً فإن قيمها الذاتية تكون تخيلية صرفة (الجزء الحقيقي معدوم). وإذا كانت هذه القيم مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون متعامدة. أو يمكن تحويلها إلى متعامدة (نظرية غرام) .

ن13: إذا كان الشعاع U هو الشعاع الذاتي للمصفوفة A والمقابل للقيمة الذاتية λ ، وكان a أي عدد حقيقي غير الصفر، فإن الشعاع $(\alpha * u)$ يكون أيضاً ذاتياً للمصفوفة A ومقابلاً للقيمة الذاتية λ نفسها .

ن14: إذا كانت A مصفوفة مربعة ومتناظرة، وكانت L أي مصفوفة نظامية ($|L| \neq 0$) ومن مرتبة A ، فإن المصفوفة B المعرفة بالعلاقة $B = L^{-1} * A * L$ تكون مشابهة لـ A ويكون لها نفس القيم الذاتية التي لـ A (ولكن الأشعة الذاتية تبقى غير متطابقة) .

وإن الأشعة الذاتية لـ B تساوي حاصل ضرب L^{-1} في الأشعة الذاتية لـ A . أي أن: $V = L^{-1} * U$

حيث: U هي الأشعة الذاتية لـ A و V هي الأشعة الذاتية لـ B

وبالتالي فإن المصفوفتين B, A تكونان متشابهتين. وتسمى المصفوفة L بتحويلة التشابه .

ن15: إذا شكلنا من أعمدة الأشعة الذاتية للمصفوفة A بحسب ترتيبها مصفوفة T ، فإننا سنحصل على مصفوفة مربعة من مرتبة A ، وتسمى المصفوفة T بالمصفوفة الظاهرية لـ A (medal matrix)، وإذا كانت المصفوفة T نظامية ($|T| \neq 0$)، فإن المصفوفة D المعرفة بالعلاقة:

$D = T^{-1} * A * T$ تكون مصفوفة قطرية، وإن عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية لـ D وتساهي القيم الذاتية لـ A حسب الترتيب السابق . أي أن:

$$D = T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} = A \quad (25 - 2)$$

أي أن المصفوفتين D, A تكونان متشابهتين، وتسمى المصفوفة T بتحويلة الاستقطار والتشابه Similarity diagonalization transformation، ويستفاد من هذه النظرية في عملية تحويل المصفوفات إلى مصفوفات قطرية، وفي عمليات التحقق من صحة الأشعة الذاتية.

وهناك شكل آخر لهذه النظرية وهو أن يكون:

$$A * T = T * A \quad (\text{وتطبق عندما يكون } T^{-1} \text{ غير موجود})$$

حيث A : هي مصفوفة قطرية مؤلفة من القيم الذاتية λ_i على القطر الرئيسي .

ن16: إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A ومكررة m مرة وكانت الأشعة $U_1, U_2, U_3 \dots U_m$ هي الأشعة الذاتية المقابلة لـ λ المكررة، فإن التركيب الخطي لها $\sum_{i=1}^m \alpha_i * U_i$ يكون أيضاً شعاعاً ذاتياً للمصفوفة A ومقابلاً للقيمة الذاتية λ نفسها حيث أن أية أعداد حقيقية غير الصفر.

ن17: إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة النظامية A ($|A| \neq 0$) ويقابلها الشعاع الذاتي U فإن λ^k تكون قيمة ذاتية للمصفوفة الأسية A^k ويقابلها نفس الشعاع الذاتي U . حيث أن k عدد صحيح بشكل عام.

نتيجة هامة: إذا كان $k=-1$ فإنه يكون لدينا المصفوفة A^{-1} ويكون λ^{-1} قيمة ذاتية لها، أما شعاعها الذاتي فيبقى U هو نفسه الذي لـ A . أي أن القيم الذاتية لـ A^{-1} هي مقاليب القيم الذاتية لـ A ، ولكن الأشعة الذاتية تبقى نفسها .

ن18: إذا كان للمصفوفة A القيمة والشعاع الذاتي (λ, U) وكان لدينا التابع $f(A) = \sum_{i=1}^m \alpha_i * A^i$ ، فإن $f(A)$ يكون له القيمة والشعاع الذاتي $[f(\lambda), u]$.

ن19: نظرية (كايلي - هاملتون) .

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n وكانت معادلتها المميزة بالنسبة لـ λ هي :

$$|A - \lambda I| = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n = 0 \quad (26 - 2)$$

فإن A نفسها تحقق تلك المعادلة الذاتية أي يكون لدينا:

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots a_n A^n = 0 \quad (27-2)$$

ن20: يمكن الحصول على المقلوب A^{-1} من العلاقة (27-2) $\sum_{i=0}^n \alpha_i * A^i = 0$ وذلك بضرب تلك الصيغة بـ A^{-1} من اليسار فنجد أن :

$$a_0 A^{-1} + a_1 I + a_2 A + a_3 A^2 + \cdots a_n A^{n-1} = 0$$

وبالتالي نحصل على المقلوب A^{-1} من العلاقة:

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0} [a_1 I + a_2 A + a_3 A^2 + \cdots a_n A^{n-1}] \quad (28-2)$$

ن21: يمكن فك أو نشر أي مصفوفة أسية $A_{n \times n}^k$ (حيث $k < n$) على شكل متسلسلة قوى من A حتى القوة $(n-1)$ أي يمكن كتابة A_n^k على الشكل التالي:

$$A_n^k = B_0 + B_1 A^1 + B_2 A^2 + \cdots B_{n-1} A^{n-1} \quad (29-2)$$

ن22: يمكن فك واقتطاع أي دالة مصفوفة $f(A)$ إلى الحد A^{n-1} كحد أعلى. أي يمكن كتابتها كما يلي:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i \quad \text{بشرط تقارب المتسلسلة} \quad (30-2)$$

وهناك نظريات أخرى يمكن البحث عنها في المراجع المختصة .

$$\text{مثال (2-2):} \text{ لنأخذ المصفوفة المتناظرة التالية : } A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

والمطلوب: إيجاد القيم والأشعة الذاتية لـ A ، ثم حساب المصفوفة T والجداء $T^{-1} * A * T$

$$T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \text{ثم التأكد من أن:}$$

الحل: لإيجاد القيم الذاتية لهذه المصفوفة نشكل المعادلة الذاتية لها وهي:

$$A * X = \lambda X$$

$$[A - \lambda I] * X = 0$$

وحتى لا نحصل على الحل التافه للشعاع العمودي ($X=0$) نضع محدد المصفوفة مساوياً للصفر، أي

$$\text{نجعل: } |A - \lambda I| = 0 \quad \text{فنجد أن:}$$

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 & -4 \\ -2 & 2 - \lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

وبأخذ مفكوك هذا المحدد حسب الأفطار نجد أن:

$$(5 - \lambda)(2 - \lambda)(5 - \lambda) + 16 + 16 - 16(2 - \lambda) - 4(5 - \lambda) - 4(5 - \lambda) = 0$$

$$(10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2)(5 - \lambda) + 32 - 32 + 16\lambda - 20 + 4\lambda - 20 + 4\lambda = 0$$

$$50 - 35\lambda + 5\lambda^2 - 10\lambda + 7\lambda^2 + \lambda^3 + 24\lambda - 40 = 0$$

ومنه نحصل على المعادلة المميزة التالية :

$$10 - 21\lambda + 12\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

نحل هذه المعادلة بالنسبة لـ λ حسب خوارزمية معادلات الدرجة الثالثة، فنحصل على (3) جذور كامنة أو على (3) قيم ذاتية للمصفوفة السابقة A وهي: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 10$

وهنا نلاحظ أن: مجموع هذه القيم لذاتية = مجموع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة $\text{trace}(A) = A$
 $1 + 1 + 10 = 5 + 2 + 5 = 12$

وللحصول على الأشعة الذاتية المقابلة لكل من هذه القيم الذاتية نعوض قيم λ على التوالي في مصفوفة المعادلة الذاتية: فعندما نضع $\lambda_1 = 1$ فإنه يكون لدينا:

$$\begin{bmatrix} 5-1 & -2 & -4 \\ -2 & 2-1 & 2 \\ -4 & 2 & 5-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلات الخطية المتجانسة التالية:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

وهي معادلات غير مستقلة عن بعضها البعض، بل هي عبارة عن معادلة واحدة (لأن الثانية تنتج من الأولى بضربها بـ $(-\frac{1}{2})$ والثالثة من الأولى بضربها بـ (-1)).
 ولذلك نأخذ معادلة واحدة منها ولتكن المعادلة الثانية فنجد أن:

$$-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad (1)$$

وهي تعطينا لانهاية من الحلول المقبولة، لذلك نبدأ بالحل البسيط الذي يكون فيه $x_3 = 0$ فنحصل على

$$\text{أن: } x_2 = 2x_1 \text{ ثم نضع } x_1 = -1 \text{ فنحصل على أن } x_2 = -2$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ وبذلك نحصل على الشعاع الذاتي الخاص الأول وهو:}$$

ومنها نحصل على حزمة الأشعة المقابلة للقيمة الذاتية: $\lambda = 1$ من العلاقة:

$$U_1 = C * \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث C هو أي عدد حقيقي (غير الصفر).

ولكن إذا وضعنا $x_2 = 0$ في المعادلة (1) فإننا سنحصل على أن $x_3 = x_1$ ، لذلك يمكن أن نضع $x_1 = 1$ فنحصل على $x_3 = 1$ ، وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي الخاص الآخر المقابل أيضاً

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ للقيمة الذاتية } \lambda = 1 \text{ وهو:}$$

ومنها نحصل على حزمة أخرى من الأشعة المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ من العلاقة الآتية:

$$U_2 = C * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولكن إذا وضعنا $x_1 = 0$ في المعادلة (1) فإننا سنحصل على أن : $x_2 = -2x_3$ ، وعندها يمكن أن نضع $x_3 = 1$ فنحصل على أن $x_2 = -2$ ، وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي الخاص الثالث المقابل أيضاً لـ $\lambda_2 = 1$ وهو :

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على حزمة ثالثة من الأشعة المقابلة أيضاً للجذر الذاتي $\lambda = 1$ من العلاقة الآتية:

$$U_3 = cu_3$$

وحسب النظرية (16) نلاحظ أن: $u_3 = u_1 + u_2$ أي أن u_3 غير مستقل عن u_1, u_2 لأنها تقابل نفس القيمة الذاتية $\lambda = 1$.

وللتحقق من أن هذه الأشعة u_1, u_2, u_3 صحيحة نتأكد من أن قيمها تحقق المعادلة الذاتية التالية:

$$AU = \lambda * U$$

وكمثال على ذلك نأخذ أحد أشعة الحزمة الثالثة فنجد أنها محققة :

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 * \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وأخيراً لنأخذ القيمة الذاتية الثالثة $\lambda_2 = 10$ ونعوضها في المعادلة $[A - \lambda I]X = 0$ فنجد أن:

$$\begin{bmatrix} (5-10) & -2 & -4 \\ -2 & (2-10) & 2 \\ -4 & 2 & (5-10) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -2 & -8 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلات الخطية التالية:

$$-5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$$

$$-2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0$$

وهي معادلات غير مستقلة عن بعضها البعض (لأن محددها معدوم)، ولحلها نقوم بضرب الثانية بـ

(2)، ثم نطرحها من الثالثة فنحصل على المعادلة التالية:

$$0 + 18x_2 - 9x_3 \Rightarrow x_3 = 2x_2$$

فإذا وضعنا $x_2 = 1$ فإن $x_3 = 2$ ، وبالتعويض في المعادلة الثالثة أو غيرها نجد أن $x_1 = -2$

وبذلك نحصل على الحل الخاص الأول المقابل للقيمة الذاتية: $\lambda_3 = 10$ وهو:

$$u_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow U_4 = C \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وللتأكد من صحته نعوضه في المعادلة $A * U = \lambda U$ فنجد أنها محققة :

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ثم نقوم بتشكيل المصفوفة T من الأشعة الذاتية المقابلة للقيم الذاتية وهي: U_1, U_2, U_4 فنحصل على أن:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & +2 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وبذلك نجد أن:

$$T^{-1} * A * T = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} * A * T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

وإذا أردنا أن نحصل على الأشعة الذاتية الواحدية لهذه المصفوفة، فإننا نقوم بحساب أطوال الأشعة الذاتية السابقة ونقسم عناصر كل شعاع على طولها كما يلي:

$$\|u_1\|^2 = 1^2 + 2^2 + 0^2 = 5 \Rightarrow \|u_1\| = \sqrt{5} = \ell_1$$

$$\|u_2\|^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow \|u_2\| = \sqrt{2} = \ell_2$$

$$\|u_3\|^2 = (-2)^2 + 1^2 + 2^2 = 9 \Rightarrow \|u_3\| = \sqrt{9} = 3 = \ell_3$$

وهكذا نجد أن الأشعة الذاتية الممعيرة الواحدية هي:

$$e_1 = \frac{u_1}{\ell_1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad : \quad \lambda_1 = 1 \text{ وهو يقابل } 1$$

$$e_2 = \frac{u_2}{\ell_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{0}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad : \quad \lambda_2 = 1 \text{ وهو يقابل } 1$$

$$e_3 = \frac{u_3}{\ell_3} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad : \quad \lambda_3 = 10 \text{ وهو يقابل } 10$$

وهي تحقق العلاقة السابقة: $T^{-1} * A * T = \Lambda$

كما أنها تحقق المعادلة الذاتية :

$$A * E = \lambda * E$$

حيث أن E هي مصفوفة الأشعة المتعامدة e_1, e_2, e_3 .

2-4 نظريات مكاملة (أنظر المراجع المرفقة)

1- نظرية النشر الطيفي (Spectral decomposition)

إذا كانت A مصفوفة مربعة ونظامية وحقيقية من المرتبة $n \times n$ ، فإنه يكون لها عدداً من القيم الذاتية الحقيقية يساوي n قيمة هي:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_n \quad (31 - 2)$$

ويقابلها عدداً n من الأشعة الذاتية الممعية (الواحدية) هي:

$$e_1, e_2, e_3 \dots e_n \quad (32 - 2)$$

وإذا كانت القيم الذاتية مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون متعامدة أي أنها تحقق العلاقتين :

$$e'_i \cdot e_i = 1 \quad e'_i \cdot e_j = 0 \quad : i \neq j$$

وإذا كانت E مصفوفة الأشعة المتعامدة $e_1, e_2, e_3 \dots e_n$

فإنه يمكننا نشر المصفوفة A بدلالة تلك الأشعة على الشكل التالي:

$$A = \lambda_1 e_1 e'_1 + \lambda_2 e_2 e'_2 + \dots \lambda_n e_n e'_n = E \cdot \Lambda \cdot E' \quad (33 - 2)$$

وللتأكد من ذلك نقوم بتطبيقها على المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ من المثال (2-1)، حيث كان لها القيم الذاتية التالية:

$$\lambda_1 = 4$$

$$\lambda_2 = -2$$

وكان لها الأشعة الذاتية الممعية المقابلة لها التالية:

$$e_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

وحسب هذه النظرية نجد أن:

$$\begin{aligned} A = \lambda_1 e_1 e'_1 + \lambda_2 e_2 e'_2 &= 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} * \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} * \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

2- نظرية المصفوفة المتعامدة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة ومتناظرة ومن المرتبة $n \times n$ وكانت قيمها الذاتية مختلفة، فإنه يكون لها مجموعة من الأشعة المتعامدة الممعية $e_1, e_2, e_3 \dots e_n$ مقابل القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ ، وإذا شكلنا من هذه الأشعة المتعامدة مصفوفة E ، فإن E ستكون متعامدة وتحقق العلاقات التالية (حسب النظرية (15)) :

$$E * E' = E' * E = I \implies E' = E^{-1} \quad (34 - 2)$$

$$E^{-1} * A * E = E' * A * E = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) \quad (35 - 2)$$

حيث أن I هي المصفوفة الواحدة من المرتبة $n * n$ ، وإن Λ هي المصفوفة القطرية التي تتألف عناصر قطرها الرئيسي من القيم الذاتية $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n$ المختلفة .

ومن جهة أخرى نجد أنه لو ضربنا العلاقة (35-2) من اليمين بـ E' ومن اليسار بـ E فنجد أن:

$$E * E' * A * E * E' = E * \Lambda * E'$$

ومنها نستنتج أن :

$$A = E * \Lambda * E' \quad (36 - 2)$$

وهذا يؤكد صحة العلاقة (33-2)

وبدمج هذه النظرية مع نظرية النشر الطيفي نستنتج أنه يمكننا كتابة أي مصفوفة مربعة ومتناظرة على الشكل التالي:

$$A = E * \Lambda * E' = \sum_{i=1}^n \lambda_i * e_i * e_i' \quad (37 - 2)$$

حيث أن: e_i هي الأشعة الذاتية المعميرة المقابلة للقيم الذاتية λ_i

وأن E هي المصفوفة المتعامدة من الأشعة المعميرة e_i

وأن Λ هي المصفوفة القطرية المؤلفة من القيم الذاتية λ_i

3- تعريف المصفوفة المحددة إيجابياً :

نقول عن أية مصفوفة مربعة ومتناظرة A ومن المرتبة $n * n$ ، إنها محددة إيجابياً إذا كانت نتيجة جداء الصيغة التربيعية $(X' A X)$ تساوي قيمة عددية موجبة، حيث X أي شعاع له نفس المرتبة n ولا يساوي الصفر . ونكتب ذلك كما يلي:

نقول عن المصفوفة A المربعة والمتناظرة إنها محددة إيجابياً إذا كان :

$$X' A X > 0 \quad : \quad (X \neq 0) \quad (38 - 2)$$

ونقول عن المصفوفة A المربعة والمتناظرة إنها شبه محددة إيجابياً إذا كان :

$$X' A X \geq 0 \quad : \quad (X \neq 0) \quad (39 - 2)$$

4- إذا كانت A مصفوفة مربعة ومحددة إيجابياً $(X' A X > 0)$ ، فإن جميع قيمها الذاتية تكون موجبة، وبالمقابل يمكننا أن نقول عن أية مصفوفة مربعة ومتناظرة A أنها محددة إيجابياً إذا كانت جميع قيمها الذاتية موجبة $(\lambda_i > 0)$ ، وعندها فإن عدد تلك القيم يكون مساوياً لرتبتها r حيث $(r \leq n)$.

أما إذا كانت إحدى القيم الذاتية معدومة فإن المصفوفة A تسمى مصفوفة شاذة (Singular) لأن محددها يكون معدوماً $(|A| = 0)$ حسب النظرية (2) .

5- إذا كانت **A** مصفوفة مربعة وشبه محددة إيجابياً ($X'AX \geq 0$)، وكانت رتبته تساوي r (حيث $r \leq n$)، فإنه يكون لها r قيمة ذاتية غير معدومة. ويكون لها $(n - r)$ قيمة ذاتية معدومة. وتستخدم هذه النظرية كثيراً في التحليل متعدد المتغيرات وخاصة في التحليل التمييزي .

6- إذا كانت **A** مربعة ومحددة إيجابياً فإن مقلوبها A^{-1} يساوي :

$$A^{-1} = E * \Lambda^{-1} * E' = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} e_i * e_i' \quad : \lambda_i \neq 0 \quad (40 - 2)$$

حيث أن Λ هي المصفوفة القطرية ($\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$)

7- إذا كانت **A** مصفوفة متناظرة وحقيقية من المرتبة $n * n$ وكانت **B** مصفوفة متناظرة وحقيقية ومحددة إيجابياً فإنه يكون للمعادلة الذاتية العامة التالية:

$$A * e = \lambda * B * e \quad (41 - 2)$$

n شعاعاً ذاتياً متعامداً ($e_1 e_2 e_3 \dots e_n$)، وتكون هذه الأشعة متعامدة مع المصفوفة **B** ، أي أنها تحقق العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} e_i' * B * e_j &= 0 & : & i \neq j \\ e_i' * B * e_i &= 1 & : & i = j \end{aligned} \quad (42 - 2)$$

وبالمقابل يكون بالنسبة لـ **A** ما يلي:

$$\begin{aligned} e_i' * A * e_j &= 0 & : & i \neq j \\ e_i' * A * e_i &= \lambda_i & : & i = j \end{aligned} \quad (43 - 2)$$

ويمكن كتابة هاتين العلاقتين بشكل مصفوفي موحد كما يلي:

$$\begin{aligned} e' * B * e &= I \\ e' * A * e &= \Lambda \end{aligned} \quad (44 - 2)$$

8- نتيجة هامة: إذا كان X_i حل خاص للمعادلة المميزة (2-11) ويقابل القيمة الذاتية λ_i فإنه يحقق المعادلة (2-10) ويمكن كتابته ومعالجته كما يلي:

$$A * X_i = \lambda_i * X_i \quad (45 - 2)$$

لنضرب الطرفين من اليسار بـ X_i' فنحصل على أن:

$$X_i' * A * X_i = \lambda_i * X_i' * X_i = \lambda_i \|X_i\|^2 \quad (46 - 2)$$

نقسم الطرفين على $\|X_i\|^2$ فنستنتج العلاقة الهامة التالية:

$$\frac{X_i' * A * X_i}{\|X_i\|^2} = \lambda_i \quad (47 - 2)$$

وهي علاقة هامة ولها استخدامات متعددة .

وكذلك نجد أنه إذا كان e_i هو الحل الممعيير للمعادلة (2-11)، المقابل للقيمة الذاتية λ_i فإنه يحقق المعادلة (2-10) ونكتب ذلك كما يلي:

$$Ae_i = \lambda_i e_i \quad (48 - 2)$$

لنضرب الطرفين من اليسار بـ e_i' فنحصل على أن :

$$e_i' * A * e_i = \lambda_i * e_i' * e_i = \lambda_i * 1 = \lambda_i \quad (49-2)$$

ومن هنا نستنتج العلاقة الهامة التالية:

$$e_i' * A * e_i = \lambda_i \quad (50-2)$$

مثال (2-3): نأخذ نتائج المثال (2-1) السابق حيث كان له القيمتين الذاتيتين التاليتين $\lambda_1 = 4$ و $\lambda_2 = -2$ ، ويقابلهما الحلين الخاصين والممعيين التاليين :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

وبذلك نجد أن :

$$\|X_1\|^2 = 2 \quad \|X_2\|^2 = 2 \quad \|e_1\|^2 = 1 \quad \|e_2\|^2 = 1$$

وبتعويض X_i في (2-47) نجد أن :

$$\frac{X_1' * A * X_1}{\|X_1\|^2} = \frac{(1, 1) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{2} = \frac{(1, 1) \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}}{2} = \frac{8}{2} = 4 = \lambda_1$$

$$\frac{X_2' * A * X_2}{\|X_2\|^2} = \frac{(1, 1) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{2} = \frac{(1, 1) \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}}{2} = \frac{-4}{2} = -2 = \lambda_2$$

وكذلك نجد أن تعويض e_i في (2-50) يعطينا أن :

$$e_1' * A * e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 2 + 2 = 4 = \lambda_1$$

$$e_2' * A * e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -1 - 1 = -2 = \lambda_2$$

5-2 مصفوفة الجذر التربيعي:

لنفترض أن A مصفوفة مربعة من المرتبة $(n * n)$ متناظرة ومحددة إيجابياً، فحسب نظرية التحليل الطيفي يمكن كتابتها كما يلي:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i * e_i * e_i' \quad (51-2)$$

وليكن لدينا E مصفوفة الأشعة الذاتية الممعية والمتعامدة لها وهي :

$$E = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ \dots \ e_n] \quad (52-2)$$

حيث أن E متعامدة وتحقق العلاقات التالية : $E * E' = E' * E = I$, $E' = E^{-1}$

وعندها فإن A يمكن أن تكتب حسب العلاقة (2-37) كما يلي:

$$A_{k \times k} = \sum_{i=1}^k \lambda_i * \mathbf{e}_i * \mathbf{e}'_i = E_{k \times k} * \Lambda_{k \times k} * E'_{k \times k} \quad (2-53)$$

حيث أن Λ هي المصفوفة القطرية للقيم المميزة الموجبة للمصفوفة A وتساوي :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad : \lambda_i > 0 \quad (2-54)$$

والآن لنضرب من اليسار طرفي العلاقة (1-53) بـ $E * \Lambda^{-1} * E'$ فنحصل على أن:

$$E \Lambda^{-1} E' A = E \Lambda^{-1} E' * E * \Lambda * E' = E * E' = I \quad (2-55)$$

ثم نضرب طرفي (1-55) من اليمين بـ A^{-1} فنحصل على أن (بعد تبديل موقعي الطرفين) :

$$A^{-1} = E * \Lambda^{-1} * E' * A * A^{-1}$$

ومنها نحصل على أن :

$$A^{-1} = E * \Lambda^{-1} * E' = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} * \mathbf{e}_i * \mathbf{e}'_i \quad (2-56)$$

ومن جهة أخرى لنفترض أن المصفوفة $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ ترمز إلى المصفوفة القطرية التي عناصرها القطرية $\sqrt{\lambda_i}$ ، أي أن:

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_k} \end{bmatrix} \quad : \lambda_i > 0 \quad (2-57)$$

قياساً على (1-53) يمكننا أن نعرف مصفوفة الجذر التربيعي $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ للمصفوفة A بواسطة العلاقة التالية:

$$A^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} * \mathbf{e}_i * \mathbf{e}'_i = E * \Lambda^{\frac{1}{2}} * E' \quad (2-58)$$

وكذلك نجد أن $A^{-\frac{1}{2}}$ تساوي:

$$A^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} * \mathbf{e}_i * \mathbf{e}'_i = E * \Lambda^{-\frac{1}{2}} * E'$$

وهي مصفوفة مربعة ومتناظرة ومن المرتبة $n * n$ ، وتتمتع هذه المصفوفة الجذرية بالخواص التالية:

$$1) \left(A^{\frac{1}{2}} \right)' = A^{\frac{1}{2}} \quad \left(\text{لأن } A^{\frac{1}{2}} \text{ قطرية} \right) \quad (2-59)$$

$$2) \left(A^{\frac{1}{2}} \right) * \left(A^{\frac{1}{2}} \right) = A \quad (2-60)$$

$$3) \left(A^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} * \mathbf{e}_i * \mathbf{e}'_i = E \Lambda^{-\frac{1}{2}} E' = A^{-\frac{1}{2}} \quad (2-61)$$

وذلك لأن $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ مصفوفة قطرية وعناصرها القطرية هي $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$:

$$4) A^{+\frac{1}{2}} * A^{-\frac{1}{2}} = A^{-\frac{1}{2}} * A^{+\frac{1}{2}} = I \quad (62 - 2)$$

$$5) A^{-\frac{1}{2}} * A^{-\frac{1}{2}} = A^{-1} \quad (63 - 2)$$

$$6) A^{-\frac{1}{2}} = \left(A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \Leftrightarrow \left(A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = A^{-\frac{1}{2}} \quad (64 - 2)$$

2-6 مصفوفة المتراجحات والتعظيم :

إن قضية التعظيم تلعب دوراً هاماً في التحليل المتعدد، وفي التحليل التمييزي الخطي. فعلى سبيل المثال فهي تفيدنا في مسألة توزيع أو تصنيف المشاهدات على المجموعات التي يتألف منها المجتمع المدروس. وإن قاعدة التوزيع غالباً ما تكون على شكل تابع خطي من المتحولات التي تعظم الفروقات بين المجموعات بالنسبة لتبايناتها الداخلية. وفي طريقة المركبات الأساسية والعوامل الرئيسية نعتمد على تركيب خطي من المتحولات لتعظيم الجدوى الاقتصادية لها .

وتلعب المتراجحات المصفوفية دوراً كبيراً في البرهان على بعض النظريات وفي تعظيم النتائج المستخرجة منها. وأهم هذه المتراجحات هي:

• متراجحة (كوشي - شوارز) Cauchy- shwarz :

لنفترض أنه لدينا شعاعين عموديين b, d من المرتبة $1 * p$ ، فعندها يكون بينهما المتراجحة التالية:

$$(b' * d)^2 \leq (b' * b) * (d' * d) \quad (65 - 2)$$

وتحدث المساواة فقط عندما يكون $b = cd$ أو $d = cb$ حيث c ثابت ما لا يساوي الصفر.

• متراجحة (كوشي - شوارز) الموسعة :

لنفترض أنه لدينا شعاعين b, d من المرتبة $1 * p$ ، وأنه لدينا مصفوفة B محددة إيجابياً ومتناظرة، فعندها يكون لدينا بينهم المتراجحة التالية:

$$(b' * d)^2 \leq (b' * B * b) * (d' * B^{-1} * d) \quad (66 - 2)$$

وتحدث المساواة فقط عندما يكون: $b = cB^{-1}d$ أو $d = cBb$ ، حيث c ثابت ما لا يساوي الصفر.

• مسألة التعظيم:

لنفترض أنه لدينا مصفوفة محددة إيجابياً ومتناظرة B ، وأنه لدينا شعاعاً معلوماً d ، وإذا كان X شعاعاً كيفياً (مجهولاً) وغير معدوم، فإن تعظيم النسبة التالية يساوي :

$$\max \left[\frac{(X' * d)^2}{X' * B * X} \right] = d' * B^{-1} * d \quad (67 - 2)$$

وهذه المساواة تحدث عندما $X = cB^{-1}d$

ويمكن البرهان على هذه النتيجة اعتماداً على متراجحة (كوشي - شوارتز) الموسعة بالنسبة لـ X ، فنجد أن العلاقة (66-2) تأخذ الشكل التالي:

$$(X' * d)^2 \leq (X' * B * X)(d' * B^{-1} * d) \quad (68 - 2)$$

وبما أن $X \neq 0$ وأن B محددة إيجابياً، فإن جداء الصيغة التربيعية لهما يساوي قيمة موجبة أي أن:

$$X' * B * X > 0$$

لذلك نقسم الآن طرفي المتراجحة (68-2) على الكمية العددية الموجبة السابقة $(X' * B * X)$ ، فنحصل على الحد الأعلى للنسبة المذكورة. أي نحصل على أن :

$$\frac{(X' * d)^2}{X' * B * X} \leq d' * B^{-1} * d \quad (69 - 2)$$

$$\max \frac{(X' * d)^2}{X' * B * X} = d' * B^{-1} * d$$

وهذا يعني أن:

ثم نقوم بالبحث عن قيمة X التي تقابل تلك القيمة العظمى في (69-2)، فنجد أن ذلك يحدث عندما تبلغ النسبة (69-2) حداً أعلى $(d' * B^{-1} * d)$ ، ولقد تم البرهان على إن هذا يحدث عندما تأخذ X القيمة: $X = cB^{-1}d$ حيث c ثابت كيفي $c \neq 0$.

وللتحقق من ذلك نعوض ذلك الحل في (69-2)، وبما أن B^{-1} متناظرة فإن $(B^{-1})' = B^{-1}$ ، وبالتالي يكون لدينا :

$$\frac{(cd' * B^{-1} * d)^2}{cd' * B^{-1} * B * cB^{-1} * d} = \frac{c^2(d' B^{-1} d)^2}{c^2 d' * B^{-1} * d} = d' * B^{-1} * d \quad (70 - 2)$$

وهذا يعني أن الحل الذي يعظم النسبة $\frac{(X' * d)^2}{X' * B * X}$ هو الحل X الذي يساوي $X = cB^{-1}d$ ، وإن أكبر قيمة لتلك النسبة تساوي :

$$\max \left[\frac{(X' * d)^2}{X' * B * X} \right] = d' * B^{-1} * d \quad (70a - 1)$$

7-2 مسألة تعظيم الصيغة التربيعية من نقطة على سطح الكرة الواحدة :

لنفترض أن B هي مصفوفة محددة إيجابياً ومتناظرة ومن $n \times n$ ، ولها القيم الذاتية الموجبة والمرتبة التالية: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ ، ويقابلها الأشعة الذاتية الممعيمة والمتعامدة $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ ، وتحقق العلاقات :

$$Be_i = \lambda_i e_i \quad i: 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n$$

$$e'_i * B * e_i = \lambda_i$$

فعندها يكون لدينا :

$$\max \frac{X' * B * X}{X' * X} = \lambda_1 \quad \text{أكبر قيمة ذاتية} \quad (71 - 2)$$

$$\min \frac{X' * B * X}{X' * X} = \lambda_n \quad \text{أصغر قيمة ذاتية} \quad (72 - 2)$$

وعدا عن ذلك فإذا كان X متعامداً مع الأشعة الأولى $e_1, e_2, \dots, e_k$ ، فعندها يكون لدينا :

$$\max \frac{X' * B * X}{X' * X} = \lambda_{k+1} \quad (73 - 2)$$

وهذا يحدث عندما يكون: $X = e_{k+1}$ حيث $k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ وللبرهان على ذلك نأخذ المصفوفة المتعامدة E والتي أعمدتها مؤلفة من الأشعة الممعية والمتعامدة للمصفوفة B وهي: $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ ، مع المصفوفة القطرية Λ التي عناصرها القطرية هي جملة القيم الذاتية للمصفوفة B وهي: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ ، واعتماداً على العلاقة (2-58) نجد أنه يمكننا أن نعرف المصفوفة الجذرية $B^{\frac{1}{2}}$ بدلالة E و Λ كما يلي :

$$B^{\frac{1}{2}} = E * \Lambda^{\frac{1}{2}} * E' \quad (74 - 2)$$

ولهذا نعوض ذلك في النسبة $\frac{X' * B * X}{X' * X}$ بعد تحليل B إلى جداء مصفوفتين للجذر التربيعي كما يلي:

$B = B^{\frac{1}{2}} * B^{\frac{1}{2}}$ ، ثم نفرض أن $Y = E' * X$ فإن $Y \neq 0$ لأن $X \neq 0$ وبالتالي نحصل من (2-71) على أن :

$$\begin{aligned} \frac{X' * B^{\frac{1}{2}} * B^{\frac{1}{2}} * X}{X' * X} &= \frac{X' * E * \Lambda^{\frac{1}{2}} * E' * E * \Lambda^{\frac{1}{2}} * E' * X}{X' * P * P' X} = \frac{Y' * \Lambda * Y}{Y' * Y} = \\ &= \frac{\sum^n \lambda_i y_i^2}{\sum^n y_i^2} \leq \lambda_1 \frac{\sum^n y_i^2}{\sum^n y_i^2} = \lambda_1 \end{aligned} \quad (75 - 2)$$

وذلك بعد استبدال كل القيم الذاتية λ_i بأكبرها λ_1 وإخراجها خارج المجموع الأخير وبذلك نكون حصلنا على أن:

$$\max \frac{X' * B * X}{X' * X} \leq \lambda_1 \quad (76 - 2)$$

فمثلاً إذا أخذنا أي حل ممعير مثل $X = e_1$ فإننا نجد أنه يحقق $e'_1 * e_1 = 1$ وبالتعويض نحصل على أن تلك النسبة تساوي اعتماداً على (2-76) ما يلي:

$$\frac{e'_1 * B * e_1}{e'_1 * e_1} = e'_1 * B * e_1 = \lambda_1 \quad (77 - 2)$$

وهكذا يتم البرهان على البند الثاني فنحصل على أن أصغر قيمة لتلك النسبة تساوي λ_n أصغر القيم الذاتية لـ B

$$\min \frac{X' * B * X}{X' * X} = \lambda_n \quad (78 - 2)$$

وللبرهان على البند الثالث نأخذ العلاقة العامة التالية :

$$X = E' * Y = [e_1, e_2, \dots, e_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = e_1 y_1 + e_2 y_2 + \dots + e_n y_n$$

وبما أن X متعامدة مع الأشعة الأولى المتعامدة $e_1, e_2, \dots, e_k$ ، فإنه إذا ضربنا X من اليسار بـ e_1 فإن الجداء $e'_1 * X$ يكون معدوماً. ومنه نجد أن:

$$e'_1 * X = e'_1 * E' * Y \Rightarrow e'_1 e_1 y_1 + e'_1 e_2 y_2 + \dots + e'_1 e_n y_n = 0 \quad (79 - 2)$$

$$= 1 * y_1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

وبطريقة مشابهة نجد أن: $y_1 = y_2 = y_3 = \dots y_k = 0$

وبذلك تأخذ النسبة السابقة الشكل التالي :

$$\frac{X' * B * X}{X' * X} = \frac{\sum_{i=k+1}^r \lambda_i * y_i^2}{\sum_{i=k+1}^r y_i^2} \leq \lambda_{k+1} \quad (80 - 2)$$

لأنه إذا وضعنا λ_i مساوية لأكبرها λ_{k+1} ، فإننا نحصل على القيمة العظمى لها والتي تساوي λ_{k+1} .
الخلاصة : إذا أخذنا أي شعاع ممعير مثل e_0 فإن النسبة $\frac{X' * B * X}{X' * X}$ يكون لها نفس القيمة التي للصيغة التربيعية $(e'_0 * B * e_0)$ ، حيث أن e'_0 هو منقول الشعاع الممعير المساوي لـ: $e'_0 = \frac{X'}{\sqrt{X' * X}}$ والذي طوله يساوي الواحد .

وبالمقابل نجد أن المعادلة (1-53) تشير إلى أن القيمة الذاتية λ_1 هي القيمة الكبرى للصيغة التربيعية $(X' * B * X)$. من أجل جميع قيم X التي تبعد عن مركزها الأصلي بمقدار الواحد (قيم X التي تقع على محيط كرة نصف قطرها يساوي الواحد) .

وكذلك نجد أن القيمة الذاتية λ_n هي القيمة الصغرى للصيغة التربيعية $(X' * B * X)$ ، من أجل جميع قيم X التي تبعد عن المركز بمقدار الواحد (قيم X التي تقع على محيط كرة نصف قطرها يساوي الواحد).

أي أن القيمة الذاتية الكبرى λ_1 والقيمة الذاتية الصغرى λ_n تقدم لنا عرضاً للقيم الخارجية للصيغة $(X' * B * X)$ من أجل جميع قيم X التي تقع على محيط الكرة الواحدة .
 وإن القيم الذاتية الوسطى للمصفوفة المحددة إيجابياً B وذات المرتبة $(n * n)$ أيضاً يمكن أن تفسر على أنها قيم خارجية . عندما تأخذ X أوضاعاً متعامدة مع الخيارات الأخرى .

المراجع :

- 1- مجدي الطويل: المصفوفات (النظرية والتطبيق) - الباب الثالث - جامعة القاهرة - كلية الهندسة - عام (غير مذكور).
- 2- Lancaster, k. Mathematical Economics, Macmilan Comb. Landon, New York, - Rusian.ed. Moscow- Sof. Padio. 1972
- 3- Johnson R.A. Wichern, D. Applied Multivariate statistical Analysis 2^d Ed. Prentice- Hall Intenational Editions. London . 1988
- 4- Webb, A. Statistical Pattern Recignition ,3nd.ed, QinetiQ Ltd,Malvern, UK . 2002.